



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Energias Alternativas e Renováveis
Departamento de Engenharia Elétrica

Trabalho de Conclusão de Curso

Controle de Atitude e Altura de um Quadricóptero utilizando
Técnicas de Controle PID

Ranieri da Silva Monteiro Saldanha

João Pessoa - PB

Maio - 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Energias Alternativas e Renováveis
Departamento de Engenharia Elétrica

Controle de Atitude e Altura de um Quadricóptero utilizando
Técnicas de Controle PID

Ranieri da Silva Monteiro Saldanha

Monografia apresentada a Coordenação do
Curso de Engenharia Elétrica da Universidade
Federal da Paraíba, como requisito parcial
para obtenção do título de Engenheiro
Eletricista.

Área de Concentração: Controle e Automação

Prof. Dr. Alexsandro José Virgínio dos Santos
Orientador

João Pessoa - PB
Maio - 2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à todas as pessoas que, de forma positiva ou negativa, me ajudaram a chegar até aqui. Dedico especialmente à minha mãe e ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

RESUMO

Os quadricópteros são equipamentos multirotores que utilizam 4 conjuntos propulsores, motores mais hélices, para voar. O interesse em quadricópteros, em geral os VANTs - Veículos Aéreos Não Tripulados - tem crescido nos últimos anos com os avanços das tecnologias de motores mais eficientes, sistemas de controle de voos e plataformas de transmissão de dados mais rápidas e seguras. Esses veículos foram amplamente adotados como objeto de estudo nas áreas de dinâmica e controle. Assim, o objetivo deste trabalho é fazer a modelagem matemática, cinética e dinâmica, de um quadricóptero através do Formalismo Euler-Newton, e aplicar técnicas de controle PID para estabilizar o quadricóptero em modo de voo estacionário. A validação de modelo é implementada através do uso de MatLab.

Palavras-chave: quadricóptero, vant, modelagem, Euler-Newton, PID.

ABSTRACT

Quadcopters are multipurpose equipment that uses 4 sets of propellers, motors more propellers, to fly. Interest in quadcopters, in general UAVs - Unmanned Aerial Vehicles - has grown in recent years with advances in more efficient engine technologies, flight control systems and faster and safer data transmission platforms. These vehicles were widely adopted as object of study in the areas of dynamics and control. Thus, the objective of this work is to make the mathematical, kinetic and dynamic, modeling of a quadcopter through the Euler-Newton Formalism, and to apply PID control techniques to stabilize the quadcopter in hover mode. Model validation is implemented through the use of MatLab.

Keywords: quadcopter, vant, modelling, Euler-Newton, PID.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Projeto da Bomba balao usada na guerra de Viena. Fonte: http://www.ctie.monash.edu.au/hargrave/rpav_home.html	12
Figura 1.2 – Vant Aerial Target. Fonte: http://warnepieces.blogspot.com/2012/07/the-predators-ancestors-uavs-in-great.html	13
Figura 1.3 – Buzz Bomb V1. Fonte: http://heroicrelics.org/info/v-1/v-1-cut-away.html	13
Figura 1.4 – Karem e o Drone Amber. Fonte: https://wyethdronetechnology.weebly.com/the-history-of-drone-technology.html	14
Figura 1.5 – Drone Predator. Fonte: https://wyethdronetechnology.weebly.com/the-history-of-drone-technology.html	14
Figura 1.6 – Louis e Jacques Breguet. Fonte: http://www.aviastar.org/helicopters_eng/breguet_gyro.php	15
Figura 1.7 – Flying Octopus de Jerome de Bothezat. Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/De_Bothezat_helicopter	16
Figura 1.8 – Oemichen versão 2. Fonte: http://www.aviastar.org/helicopters_eng/oemichen.php	16
Figura 1.9 – Drone entregando material hospitalar. Fonte: https://www.dronebelow.com/2018/10/08/using-drones/	17
Figura 1.10–Configurações atuais de aeronaves multirrotores. Fonte: http://www.quadcopter.8u.cz/stavba-quadrokoptyery/rozlozeni-vrtuli/	17
Figura 1.11–Sistema de Referência para orientação de um avião.	19
Figura 1.12–Sistema de Referência para orientação de um quadricóptero.	20
Figura 1.13–Ângulos de orientação: <i>Pitch</i> (ϕ), <i>Roll</i> (θ) e <i>Yaw</i> (ψ).	20
Figura 1.14–Quadricóptero em configuração "+".	21
Figura 1.15–Operações básicas de um quadrirrotor.	21
Figura 2.1 – Sistemas de Referência Inercial (T) e Fixo ao quadricóptero (B).	24
Figura 2.2 – Primeira rotação através de um ângulo ψ ao redor de z	26
Figura 2.3 – Segunda rotação através de um ângulo θ ao redor do novo eixo y'	26
Figura 2.4 – Terceira rotação através de um ângulo ϕ ao redor de x''	27
Figura 2.5 – Arquitetura de um tipo de motor DC. Fonte: https://www.nidec.com/en-NA/technology/capability/brushless/	29
Figura 2.6 – Modelo para cálculo do momento de inércia do quadricóptero.	36
Figura 2.7 – Subsistemas de Rotação e Translação.	38
Figura 2.8 – Análise em Malha Aberta.	38
Figura 2.9 – Resposta ϕ a U_2 igual a um degrau.	39
Figura 2.10–Resposta θ a U_3 igual a um degrau.	39

Figura 2.11–Resposta ψ a U_4 igual a um degrau.	39
Figura 2.12–Resposta z a U_1 igual a um degrau.	39
Figura 3.1 – Planta de Controle de um sistema genérico.	41
Figura 3.2 – Diagrama de blocos explicitando um controlador PID genérico.	42
Figura 3.3 – Especificações para uma resposta subamortecida de segunda ordem. Fonte: [1]	44
Figura 4.1 – Bloco da Dinâmica do Quadricóptero.	47
Figura 4.2 – Arquitetura interna do Quadricóptero, onde o bloco verde representa o Subsistema Rotacional e o azul o Subsistema Translacional.	48
Figura 4.3 – Arquitetura de Controle do Quadricóptero., onde o bloco amarelo representa os controladores PID.	48
Figura 4.4 – Estrutura dos Controladores PID.	49
Figura 4.5 – Controle de ϕ	51
Figura 4.6 – Controle de θ	51
Figura 4.7 – Controle de ψ	52
Figura 4.8 – Controle de Altura z	52
Figura 4.9 – Modelo de Sistema com perturbação na saída. Fonte: https://www. verlab.dcc.ufmg.br	53
Figura 4.10–Sinal de perturbação em ϕ	53
Figura 4.11–Sinal de perturbação em z	53
Figura 4.12–Resposta ϕ com perturbação.	54
Figura 4.13–Resposta z com perturbação.	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Requisitos para ϕ e θ	45
Tabela 3.2 – Requisitos para ψ	45
Tabela 3.3 – Requisitos para z	45
Tabela 4.1 – Ganhos dos PID.	50

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

VANT	<i>Veículo Aéreo Não Tripulado</i>
PID	<i>Proporcional Integral Derivativo</i>
MatLab	<i>Matrix Laboratory</i>
DARPA	<i>Defense Advanced Research Projects Agency</i>
x_B	<i>Eixo x_B do Referencial Fixo ao Corpo B</i>
y_B	<i>Eixo y_B do Referencial Fixo ao Corpo B</i>
z_B	<i>Eixo z_B do Referencial Fixo ao Corpo B</i>
x	<i>Eixo x do Referencial Inercial T</i>
y	<i>Eixo y do Referencial Inercial T</i>
z	<i>Eixo z do Referencial Inercial T</i>
ϕ	<i>Ângulo Roll</i>
θ	<i>Ângulo Pitch</i>
ψ	<i>Ângulo Yaw</i>
\vec{v}	<i>Vetor velocidade linear no Referencial Inercial T</i>
$\vec{\omega}$	<i>Vetor velocidade angular no Referencial Fixo B</i>
u	<i>Componente da velocidade linear na direção x do Referencial Inercial T</i>
v	<i>Componente da velocidade linear na direção y do Referencial Inercial T</i>
w	<i>Componente da velocidade linear na direção z do Referencial Inercial T</i>
p	<i>Componente da velocidade angular na direção x_B do Referencial Fixo B</i>
q	<i>Componente da velocidade angular na direção y_B do Referencial Fixo B</i>
r	<i>Componente da velocidade angular na direção z_B do Referencial Fixo B</i>
R_T	<i>Matriz de Transformação</i>
τ	<i>Torque do motor DC</i>

K_t	<i>Constante de proporcionalidade do torque</i>
I	<i>Corrente de entrada do Motor DC</i>
I_0	<i>Corrente do Motor DC sem carga</i>
V	<i>Tensão nos terminais do Motor DC</i>
P	<i>Potência desenvolvida por um Motor dC</i>
R_m	<i>Resistência interna do Motor DC</i>
K_v	<i>Constante de proporcionalidade da tensão induzida no Motor DC</i>
ω	<i>Velocidade angular do Motor DC</i>
F_E	<i>Força de Empuxo</i>
v_h	<i>Velocidade no ar</i>
A	<i>Área criada pelo giro hélice</i>
ρ	<i>Densidade do ar</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Breve História dos Vants	12
1.2	Breve História das Aeronaves Multirrotores	15
1.3	Aplicações	18
1.4	Princípios de Funcionamento	19
1.5	Objetivos	22
1.5.1	Objetivo geral	22
1.5.2	Objetivos específicos	22
2	Modelagem Dinâmica de um Quadricóptero	23
2.1	Sistemas De Referência	23
2.2	Matrizes de Rotação e Transformação	25
2.3	Forças E Momentos Angulares	28
2.3.1	Potência Dos Motores	29
2.3.2	Forças	30
2.3.3	Torques	32
2.4	Equação do Movimento: Formalismo Euler-Newton	33
2.5	Modo de Operação: Voo Estacionário	36
2.6	Análise do Sistema em Malha Aberta	38
3	Controle	41
3.1	Controlador PID	41
3.1.1	Critérios de Desempenho do Sistema	43
3.2	Projeto do Controlador PID	45
4	Simulações e Resultados	47
4.1	Implementação do modelo em Matlab	47
4.2	Parâmetros do Modelo	50
4.3	Resultados de Simulação	50
5	Conclusão	55
	Referências	56

1 INTRODUÇÃO

1.1 BREVE HISTÓRIA DOS VANTS

A palavra VANT significa Veículos Aéreos Não Tripulados. Historicamente, os primeiros registros de veículos aéreos não tripulados datam de 1849 quando soldados austríacos atacaram Veneza usando balões com explosivos. Esses balões eram liberados de um navio ancorado perto de Veneza. O vento deveria carregar os balões e um mecanismo eletromagnético seria ativado liberando as bombas. A Figura 1.1 apresenta esse projeto. Devido às condições ambientais não previstas, alguns desses balões austríacos foram bem sucedidos, mas muitos deles explodiram sem atingir o alvo esperado, o que fez com que a prática não tivesse continuidade em seu desenvolvimento [2].



Бомбардировка с аэростата. "Воздушное торпедо" О. С. Костовича.

Figura 1.1 – Projeto da Bomba balao usada na guerra de Viena. Fonte: http://www.ctie.monash.edu.au/hargrave/rpav_home.html

Com a invenção das aeronaves de asas fixas tudo mudou para os veículos pilotados e não pilotados. Em 1916, em meio a Primeira Guerra Mundial, a Grã-Bretanha desenvolveu a primeira aeronave não pilotada de asas fixas, o Aerial Target, ver Figura 1.2, baseado em designs do engenheiro Nikola Tesla, e era controlada a distância por rádio, onde seu principal objetivo era destruir os Zeppelins alemães [3].

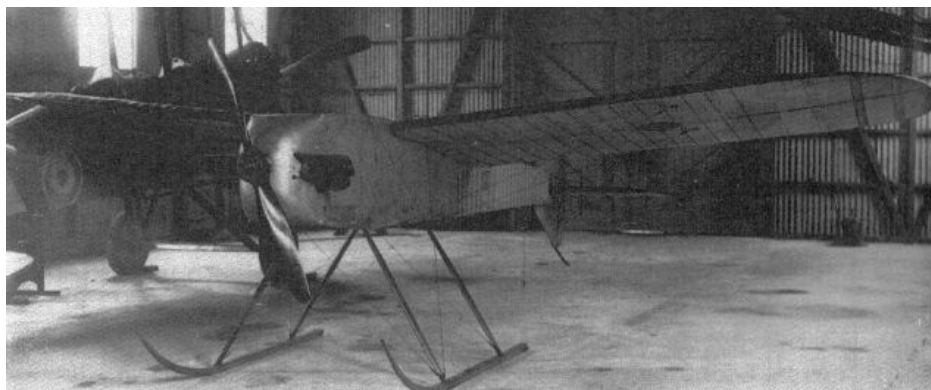
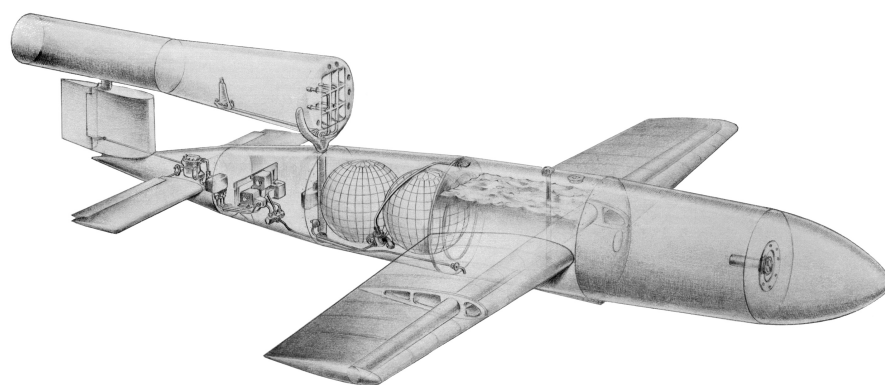


Figura 1.2 – Vant Aerial Target. Fonte: <http://warnepieces.blogspot.com/2012/07/the-predators-ancestors-uavs-in-great.html>

Na Segunda Guerra Mundial foi desenvolvido na Alemanha um VANT utilizado também em bombardeios. O mais conhecido deles é o V-1, Doodle Bug ou Buzz Bomb, ver Figura 1.3 – devido ao zumbido produzido pelo voo – foi o primeiro míssil guiado utilizado nos extensos bombardeios a Londres entre 1944 e 1945. O V-1 não foi bem sucedido porque voava em linha reta e com velocidade constante, o que tornava-o um alvo fácil para ser abatido. Com isso, os alemães desenvolveram o V-2 [4].

273



Idealized drawing of German rocket bomb propelled by a simple explosion jet-propulsion engine.

Figura 1.3 – Buzz Bomb V1. Fonte: <http://heroicrelics.org/info/v-1/v-1-cut-away.html>

Na década de 70, o engenheiro aeronáutico iraquiano Abraham Karem imigrou para os Estados Unidos onde desenvolveu o drone Albatross. O Albatross chegou a ficar 56

horas no ar, sem ser necessária nenhuma recarga de bateria, e sendo operado a distância por apenas por 3 pessoas. A revista *The Economist* descreveu Karem como o homem que mudou o rumo tático das guerras modernas travadas pelos Estados Unidos. Karem esteve a frente dos projetos Amber, Figura 1.4, financiado pela DARPA em 1984, e Predator, Figura 1.5, de 1995, o qual lhe rendeu o título de pai do drone [5].



Figura 1.4 – Karem e o Drone Amber. Fonte: <https://wyethdronetechnology.weebly.com/the-history-of-drone-technology.html>



Figura 1.5 – Drone Predator. Fonte: <https://wyethdronetechnology.weebly.com/the-history-of-drone-technology.html>

É notório, portanto, que o desenvolvimento de VANTs é produto da indústria militar, mas atualmente não tem se restringido apenas a este segmento. Com os avanços nas tecnologias de motores, sistemas de controle de voos e plataformas de transmissão de dados, estes veículos foram aperfeiçoados e sistemas de voo autônomo foram desenvolvidos.

1.2 BREVE HISTÓRIA DAS AERONAVES MULTIRROTORES

Os multirrotores fazem parte de uma categoria de aeronaves similares ao tradicional helicóptero, porém com mais de dois rotores. O primeiro registro de uma aeronave multirrotor é de 1907, quando os irmãos franceses Louis e Jacques Breguet, em parceria com Prof. Charles Richet, construíram uma estrutura simples com um total de quatro rotores, sendo um rotor em cada extremidade. Este quadrirrotor, denominado Breguet-Richet Gyroplane, ver Figura 1.6. No entanto o veículo não conseguiu pairar a mais de um metro acima do solo. Foi considerado o primeiro quadrirrotor bem sucedido [6].

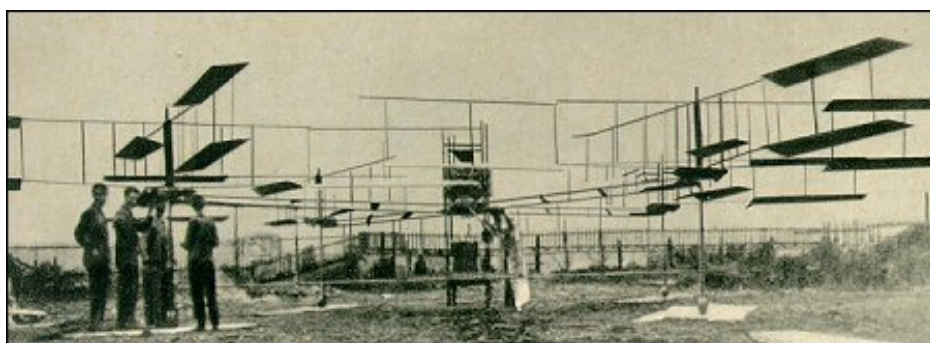


Figura 1.6 – Louis e Jacques Breguet. Fonte: http://www.aviastar.org/helicopters_eng/breguet_gyro.php

Na década de 20, há registros de aeronaves multirrotores sendo desenvolvidas nos Estados Unidos e na França. Em 1922, o exército americano desenvolve sob o comando de Georges de Bothezat o quadrirrotor com estrutura em forma de cruz, com um rotor fixado em cada extremidade e com mais quatro rotores menores para auxiliar o controle da máquina. Essa aeronave recebeu o nome de Flying Octopus, ver Figura 1.7. No mesmo ano era desenvolvido na França o Oemichen, ver Figura 1.8, pelo engenheiro francês da Peugeot, Étienne Oehmichen, que no ano de 1924 conseguiu o recorde de 360 metros voados com a aeronave desenvolvida, e bateu o próprio recorde com a mesma aeronave voando 1000 metros [7].

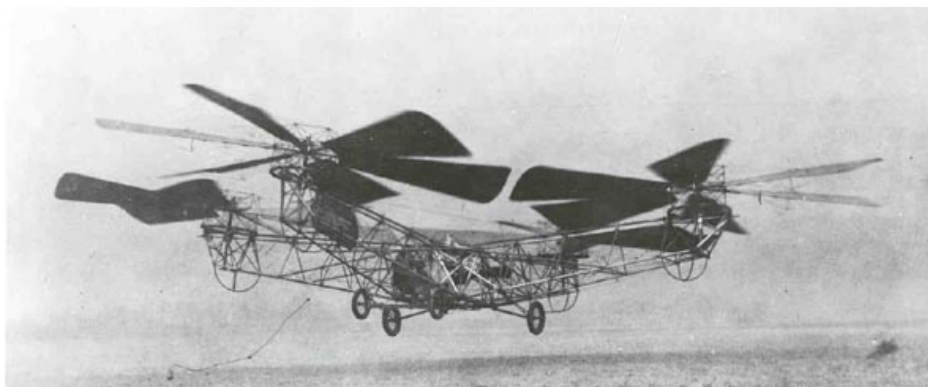


Figura 1.7 – Flying Octopus de Jerome de Bothezat. Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/De_Bothezat_helicopter

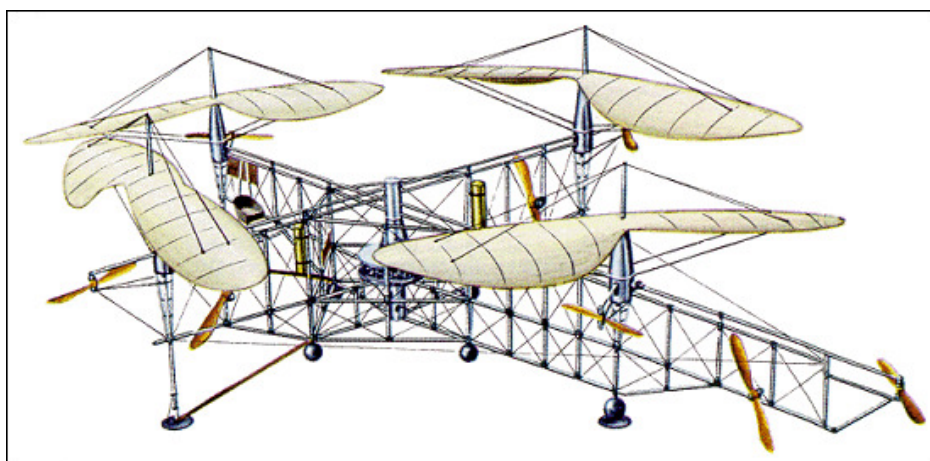


Figura 1.8 – Oemichen versão 2. Fonte: http://www.aviastar.org/helicopters_eng/oemichen.php

Embora tenha sido atingido alguns objetivos no desenvolvimento de quadrirrotores, devido a dificuldades de controle e estabilidade, bem como enormes estruturas e por consequência gastos elevados, os projetos de aeronaves multirrotores não tiveram muito incentivo. Atualmente, com o avanço da tecnologia, sobretudo na redução de dispositivos, estruturas mais robustas e mais baratas, motores menores e mais eficientes, transmissão de dados mais confiáveis, conseguiu-se desenvolver aeronaves multirrotores, como os modelos de drones atuais, ver Figura 1.9, sendo mais comum os projetos com três, quatro, seis ou oito rotores, ver Figura 1.10. Estes drones são veículos aéreos de menor tamanho, mais baratos e mais simples de construir que um avião [8].



Figura 1.9 – Drone entregando material hospitalar. Fonte: <https://www.dronebelow.com/2018/10/08/using-drones/>

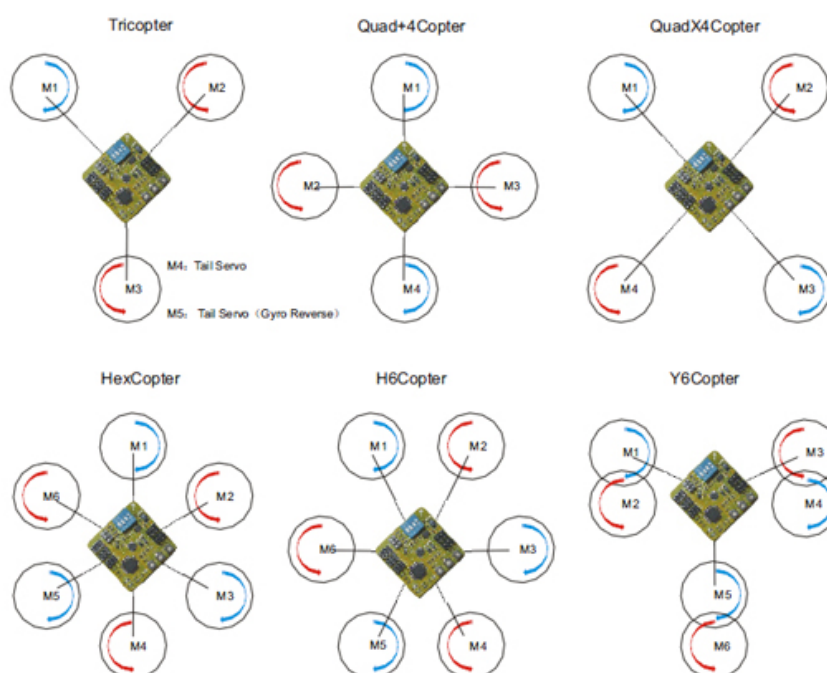


Figura 1.10 – Configurações atuais de aeronaves multirrotores. Fonte: <http://www.quadcopter.8u.cz/stavba-quadrokoptyery/rozlozeni-vrtuli/>

A principal influência do número de rotores é a força de propulsão e, consequentemente, a força total de sustentação do drone. Considerando motores da mesma categoria, drones com 3 ou 4 motores têm forças de sustentação menores que os com 6 ou 8 motores, neste sentido, um hexacóptero consegue sustentar cargas maiores que de um quadcóptero, por exemplo. Talvez, o maior atrativo destas aeronaves seja a simplicidade de controle, que consiste apenas em ajustar a velocidade de rotação de cada motor de forma independente,

permitindo o controle de suas condições de operação. Com isso, a caracterização dinâmica se torna mais simples, o que facilita a implementação de voos autônomos e rádio controlados, colocando os multirrotores na categoria dos VANTs.

1.3 APLICAÇÕES

A grande vantagem no uso de drones é a possibilidade de efetuar ações, que muitas vezes são perigosas, sem colocar vidas em riscos e também ações difíceis de serem feitas pelo ser humano. Isso trouxe muitos benefícios tanto para o mercado de drones quanto para seus consumidores. Hoje em dia, os drones possuem uma versatilidade enorme quando se trata do seu uso. Com o desenvolvimento da microeletrônica, uma rápida miniaturização de dispositivos e sensores, assim como redução dos seus custos, encontramos o uso de drones em diversas aplicações [9, 10]:

- **Imagens:** A realização de filmagens aéreas é uma das utilidades mais populares de drones, podendo variar do simples lazer, até o uso comercial por agências de publicidade, fotógrafos e afins.
- **Geoprocessamento:** Dentre as vantagens oferecidas por estes sistemas, quando comparados aos mais convencionais – como a aerofotogrametria realizada por aeronaves tripuladas – podem ser destacados a melhor resolução espacial das imagens e maior flexibilidade para a aquisição dos dados.
- **Monitoramento e vigilância:** Equipados com câmeras de alta qualidade, que permitem monitorar e capturar imagens de vastas áreas, a sua aplicação para garantir a segurança e proteção de vidas começou a ganhar maior aderência comercial pela acessibilidade e assertividade na hora de identificar problemas e conter danos.
- **Entregas de encomendas/mercadorias:** O uso de drones está sendo considerado para entrega de mercadorias por conta da possibilidade de realizar entregas em tempo recorde. Por conta de sua capacidade de voo, o equipamento não necessitaria enfrentar o trânsito das grandes cidades, como o que acontece com motoboys, e o processo de entrega seria agilizado. Nesses casos, câmeras seriam necessárias para fazer o monitoramento do RPAS, divulgando imagens do trajeto e garantindo a segurança do drone e do material de entrega.
- **Uso militar:** O seu primeiro uso continua até hoje. Não é incomum notícias, ou a presença de drones em filmes, mostrando a ação deles. Fazendo imagens do campo de batalha, vendo a movimentação dos inimigos, ou até mesmo participando de bombardeios.

- **Ajuda e Resgate:** Devido ao seu pequeno tamanho, leveza e agilidade, o uso de drones em resgate de pessoas pode ser uma alternativa viável. Por meio de um sobrevoo na área de risco, a equipe de resgate consegue obter a localização das vítimas que podem estar presas em algum lugar ou, por exemplo, em alto mar. Há, ainda, a possibilidade do equipamento ser utilizado no transporte de suprimentos, primeiros socorros e afins para as vítimas.

1.4 PRINCÍPIOS DE FUNCIONAMENTO

Controle de Atitude de uma aeronave significa controlar o movimento de uma aeronave no ar em torno dos seus três eixos de referência, perpendiculares entre si e cujo ponto de intersecção está sobre o centro de gravidade da aeronave. Esses três eixos são: eixo transversal, eixo longitudinal e eixo vertical, que para o quadricóptero são os eixos x_B , y_B e z_B . As Figuras 1.11 e 1.12 mostram essa configuração para um avião e um drone quadrirrotor, respectivamente.

O movimento de Inclinação ou Arfagem, em inglês *Pitch*, é quando a aeronave gira em torno do eixo longitudinal, y_B , isso resulta num movimento de inclinação para frente ou para trás de acordo com a orientação frontal; Movimento Longitudinal ou Rolagem, em inglês *Roll*, é quando a aeronave gira em torno do eixo transversal, x_B , resultando num movimento de inclinação para a esquerda ou para a direita de acordo com a sua orientação frontal; Guinada, em inglês *Yaw*, é quando a aeronave gira em torno do eixo vertical resultando numa mudança de direção do eixo frontal para a esquerda ou para a direita, observar Figura 1.13.

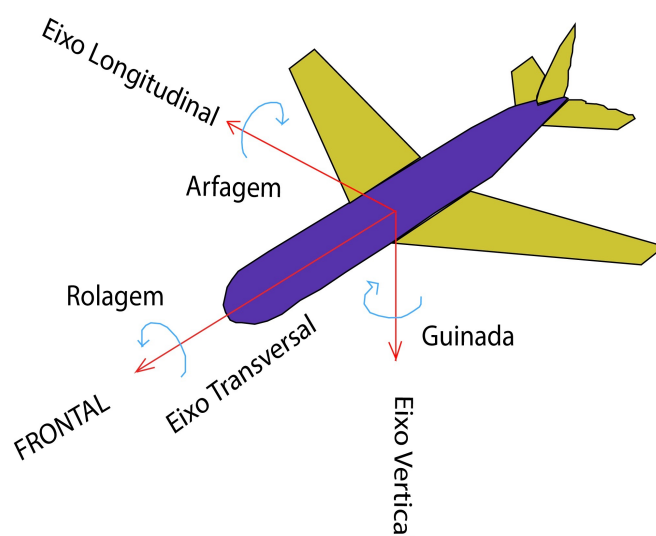


Figura 1.11 – Sistema de Referência para orientação de um avião.

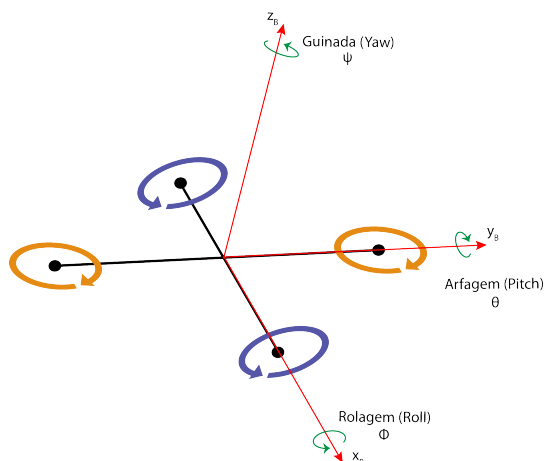


Figura 1.12 – Sistema de Referência para orientação de um quadricóptero.

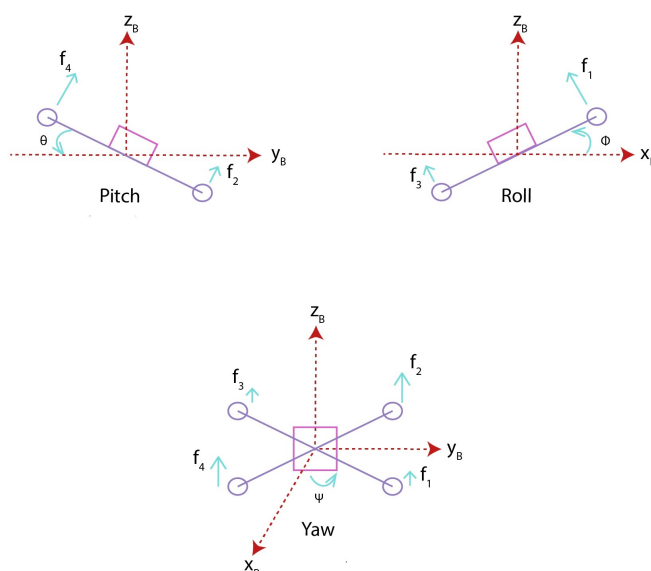


Figura 1.13 – Ângulos de orientação: *Pitch* (ϕ), *Roll* (θ) e *Yaw* (ψ).

O quadricóptero é um sistema subatuado. Um sistema subatuado é um sistema que possui uma quantidade de entradas de controle menor do que seus graus de liberdade. Dessa forma, o movimento do quadricóptero, que possui 6 graus de liberdade, se dá pelo controle das velocidades dos seus 4 motores. Esse movimento é resultado do trabalho realizado pelo conjunto desses quatro motores com seus respectivos propulsores, dispostos horizontalmente como mostrado na Figura 1.14. Os propulsores, devido ao seu formato e à rotação dos motores aos quais estão acoplados, criam um fluxo de ar no sentido contrário ao do movimento desejado, causando — devido à terceira lei de Newton (toda ação gera uma reação de mesma intensidade mas em sentido contrário) — a tração necessária ao voo. Em resumo, a variação coletiva das forças de propulsão, resultante da velocidade angular dos motores, governa a navegação tridimensional da aeronave [11].

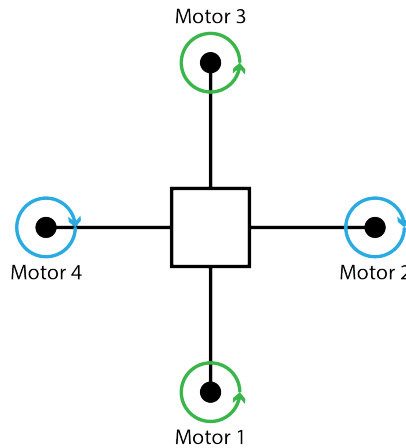


Figura 1.14 – Quadricóptero em configuração "+".

Este veículo atua através do equilíbrio de forças produzidas pelos quatro rotores. Movimentos longitudinais (ao longo do eixo x_B) são gerados pela alteração de velocidade dos rotores pela atuação de f_1 e f_3 , enquanto que deslocamentos laterais (ao longo do eixo y_b) resultam da alteração da velocidade dos rotores pela atuação de f_2 e f_4 . Movimentos de guinada (ao longo do eixo z_b) são obtidos através da diferença de contra torque entre cada par de hélices. Já o movimento ascendente ou descendente do quadricóptero é gerado pela soma de forças das quatro hélices quando os motores tiverem mesma velocidade angular [12]. Em resumo, através do controle individual de velocidade de cada rotor, é possível realizar todas as manobras sem qualquer mecanismo extra para ajustar o ângulo de incidência das pás dos rotores ao longo do seu giro [13]. A Figura 1.15 apresenta os principais movimentos realizados pela aeronave aumentando ou diminuindo a velocidade dos rotores (indicando a intensidade de rotação do rotor pelo comprimento da flecha em cima do motor).

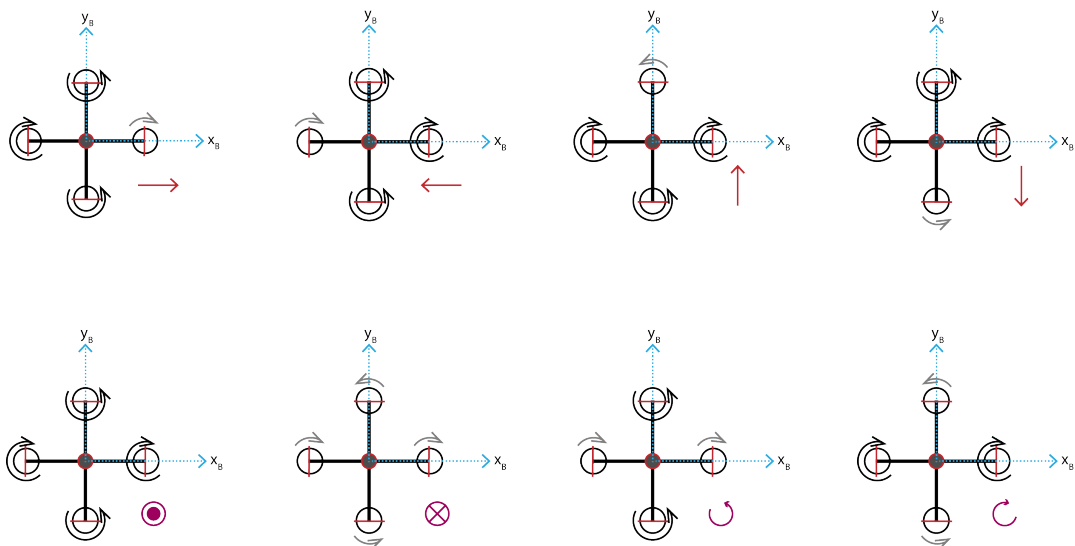


Figura 1.15 – Operações básicas de um quadricóptero.

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 OBJETIVO GERAL

Realizar o controle de estabilidade de um quadricóptero através do projeto de um Controlador PID.

1.5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Modelagem de um Quadricóptero em espaço de estados e sua adequação sistemas SISO (single-input single-output);
- Projeto de controle Proporcional-Integral-Derivativo das grandezas de atitude;
- Análise do desempenho do controlador PID considerando-se perturbações aditivas;

2 MODELAGEM DINÂMICA DE UM QUADRICÓPTERO

Os quadricópteros possuem como meio de propulsão rotores de empuxo vertical. Dessa forma o movimento do quadricóptero existe quando variam-se as velocidades dos seus rotores. Para um controle efetivo é necessário especificar os principais efeitos decorrentes destas variações. As equações da dinâmica do quadricóptero descrevem as coordenadas e velocidades em relação ao tempo. Mas é necessário assumir algumas hipóteses para simplificar o modelo [14]:

- Estrutura rígida;
- O veículo possui simetria em relação aos eixos do referencial fixo ao corpo, com o sistema de coordenadas coincidindo com o seu centro de massa;
- Dinâmica idêntica para todos os rotores, onde o empuxo e o arrasto são proporcionais ao quadrado da velocidade das hélices;
- As forças externas são consideradas perturbações não modeladas;

Na literatura existem duas abordagens clássicas para a modelagem matemática de veículos aéreos: o modelo Newton-Euler [14, 15, 16] utiliza as equações de movimento da mecânica para representação do sistema físico; e o modelo Euler-Lagrange que se baseia nos dados de excitação e de resposta do sistema [17]. Por simplicidade de projeto foi preferido o uso do Formalismo Euler-Newton que consegue atender as exigências requeridas.

2.1 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

[18] O movimento de um quadricóptero é definido pela posição e orientação do Referencial Fixo B em relação ao Referencial Inercial. Dessa forma, é necessário definir dois sistemas de coordenadas que serão usados para descrever a dinâmica do sistema. Serão utilizados dois sistemas de coordenadas: o Referencial Inercial, fixo na Terra, representado por $T = \{x, y, z\}$; e o Referencial fixo ao quadricóptero com sua origem localizada no seu centro de massa, representado por $B = \{x_B, y_B, z_B\}$. A Figura 2.1 mostra a configuração desses referenciais.

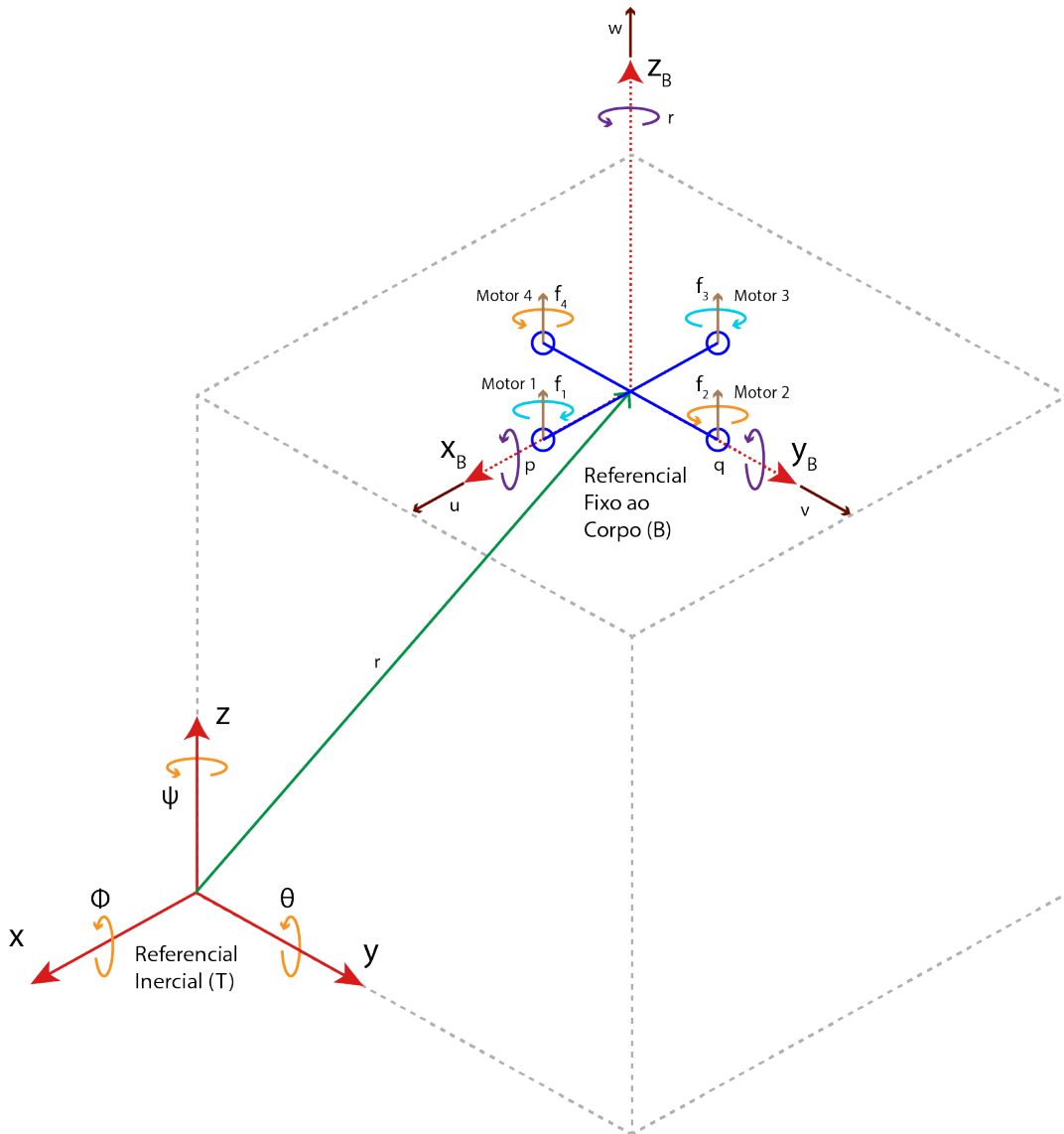


Figura 2.1 – Sistemas de Referência Inercial (T) e Fixo ao quadricóptero (B).

A localização do veículo no espaço será bem determinada usando três coordenadas de posição (x,y,z) , e além disso é importante determinar sua rotação nesse espaço tridimensional através de ângulos de orientação (ϕ, θ, ψ) . Essas seis variáveis correspondem aos graus de liberdade do quadricóptero.

O vetor posição \vec{r} representa as três coordenadas da posição do centro de massa do quadricóptero, em relação ao Referencial Inercial, e Θ representa as três coordenadas de orientação - representadas pelos ângulos de Euler: roll (ϕ), pitch, (θ), e yaw (ψ) -

respectivamente, definidos por:

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.2)$$

Pode-se ainda determinar os vetores velocidades: \vec{v} , que representa as velocidades lineares e $\vec{\omega}$ as velocidades angulares do quadricóptero em B, ver Figura XY, definidos por:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.3)$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.4)$$

2.2 MATRIZES DE ROTAÇÃO E TRANSFORMAÇÃO

Como explicado em [19, 20], a orientação pode ser feita descrevendo-se os vetores do Sistema B – Referencial Fixo ao Corpo Rígido – em relação ao Sistema T – Referencial Inercial – através de uma matriz de Transformação R_T parametrizada pelos três ângulos de Euler. A orientação de um corpo rígido girante em um espaço euclidiano tridimensional pode ser obtida utilizando diversos métodos, mas será adotado os ângulos de Euler na convenção de rotação Z-Y-X. Esse método consiste em três rotações sucessivas do Corpo Rígido:

- Rotação $R(\psi)$: primeiro giro corresponde ao ângulo yaw ψ , e se dá ao redor do eixo z, afim de se obter o sistema de referencia intermediário $z_1 = \{x'y'z'\}$, ver Figura 2.2:

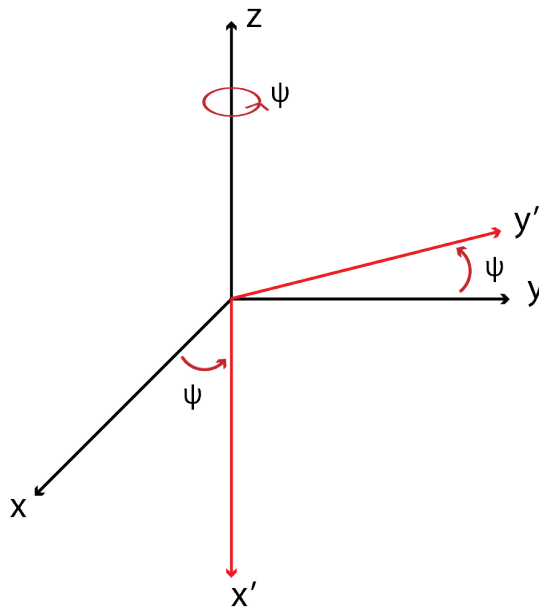


Figura 2.2 – Primeira rotação através de um ângulo ψ ao redor de z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

- Rotação $R(\theta)$: segundo giro corresponde o ângulo pitch θ , ao redor do novo eixo y' de z_1 , afim de se obter o sistema de referência intermediário $y_2 = \{x''y''z''\}$, ver Figura 2.3:

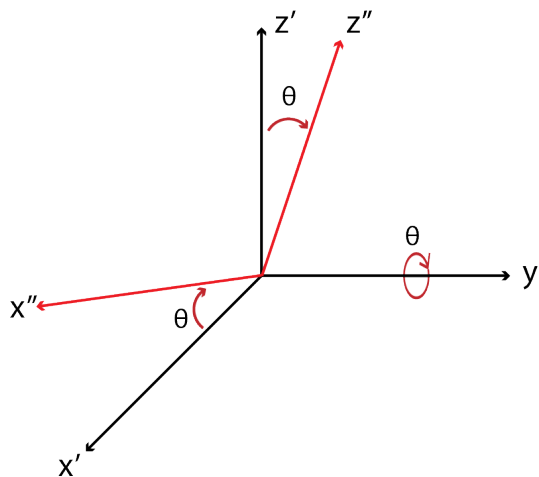


Figura 2.3 – Segunda rotação através de um ângulo θ ao redor do novo eixo y'

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

- Rotação $R(\phi)$: terceiro giro corresponde o ângulo roll ϕ , e se dá ao redor do novo eixo x'' para levar o corpo rígido a sua posição final que corresponde ao referencia B, ver Figura 2.4:

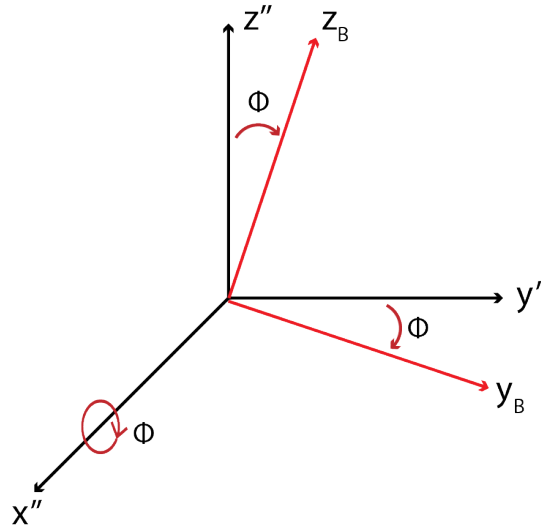


Figura 2.4 – Terceira rotação através de um ângulo ϕ ao redor de x''

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Dessa forma, definiu-se as três matrizes de rotações que representam a orientação de um corpo rígido girando ao redor de cada eixo. São elas $(R(\phi), R(\theta), R(\psi))$. Então, a Matriz de Transformação completa, de B em relação a T, é dada por:

$$\begin{aligned} R_T &= \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi \\ 0 & -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\psi s\phi s\theta - c\phi s\psi & s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi - s\phi s\theta s\psi & c\phi s\theta s\psi - c\psi s\theta \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Considerando que durante um intervalo infinitesimal de tempo dt o corpo rígido é submetido a três rotações infinitesimais $d\phi$, $d\theta$ e $d\psi$ resultando numa orientação definida

pelos ângulos $\phi + d\phi$, $\theta + d\theta$ e $\psi + d\psi$. Tendo em vista que rotações não podem ser tratadas como vetores, mas rotações infinitesimais sim, tem-se que:

$$\vec{n} = d\phi.x_B + d\theta.y'' + d\psi.z \quad (2.9)$$

Derivando (2.9) em relação ao tempo, obtém-se a velocidade angular:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \dot{\phi}.x_B + \dot{\theta}.y'' + \dot{\psi}.z \quad (2.10)$$

É importante observar que a velocidade angular $\vec{\omega}$ descrita na Equação 2.10 apresenta componentes que foram derivadas nos referenciais intermediários, as derivadas foram feitas durante a rotação angular específica. Assim que é necessário obter a velocidade angular $\vec{\omega}$ num só referencial, como descrito pela Equação 2.11:

$$\vec{\omega} = p.x_B + q.y_B + r.z_B \quad (2.11)$$

Usando as Matrizes de transformação adequadas e igualando (15) e (16) obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(\phi)R(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & \text{sen}\phi\text{cos}\theta \\ 0 & -\text{sen}\phi & \text{cos}\phi\text{cos}\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dessa forma, foram obtidas as velocidades angulares relacionadas pelas Matrizes de Rotação com a taxa de variação dos Ângulos de Euler.

2.3 FORÇAS E MOMENTOS ANGULARES

Para modelar bem a dinâmica do sistema é importante um conhecimento das propriedades físicas do sistema. Nesta seção será feita uma descrição dos motores usados pelo quadricóptero, partindo da potência, sendo feitas considerações de energia, para

derivar as forças e torques produzidos pelos motores no modelo completo. Todos os motores do quadricóptero são idênticos, dessa forma pode-se analisar um único motor e fazer uma generalização para os outros. As equações aqui descritas foram obtidas em [15, 14, 21].

2.3.1 POTÊNCIA DOS MOTORES

É comum no projeto de drones o uso de motores DC sem escovas, um exemplo de arquitetura é mos-trado na Figura 2.2. Também conhecido como motor DC de íma permanente é descrito em [22] e oferece diversos benefícios comparados a outros tipos de motores:

- Maior eficiência;
- Tamanhos reduzidos por não necessitarem de enrolamentos de campos externos;
- Custos mais baixos;

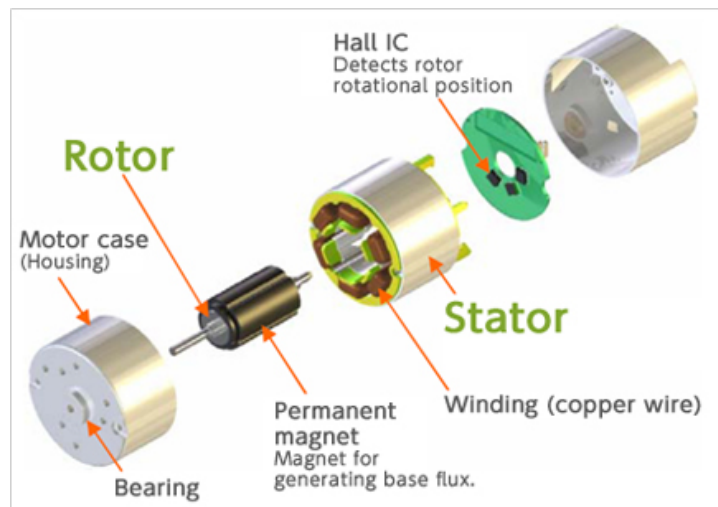


Figura 2.5 – Arquitetura de um tipo de motor DC. Fonte: <https://www.nidec.com/en-NA/technology/capability/brushless/>

O torque produzido por um motor DC é dado pela Equação 2.13:

$$\tau = K_t(I - I_0) \quad (2.13)$$

Onde I é a corrente de entrada e I_0 é a corrente do motor sem carga; K_t é a constante de proporcionalidade do torque. Dado o modelo DC do motor, a tensão nos terminais do motor, V , é dada por:

$$V = IR_m + K_v\omega \quad (2.14)$$

Onde K_v é a constante de proporcionalidade da tensão induzida, R_m é resistência do motor, e ω a velocidade angular do motor.

Com isso, pode-se encontrar a potência usada pelo motor como sendo:

$$P = IV = \frac{I_0K_t + \tau}{K_t} \left(\frac{I_0K_t + \tau}{K_t} R_m + K_v\omega \right) \quad (2.15)$$

Assumindo um modelo simplificado do motor, adota-se as seguintes hipóteses:

- Resistência do motor é desprezível;
- I_0 é muito pequena, o que torna o termo $K_t I_0 \ll \tau$;

Assim, a Equação 2.15 pode ser simplificada:

$$P \approx \frac{K_v\tau\omega}{K_t} \quad (2.16)$$

2.3.2 FORÇAS

A potência é usada para manter o quadricóptero voando. Por conservação de energia, sabemos que a energia que um motor gasta num dado período de tempo é igual a força gerada nas hélices vezes a distância que o ar é movido. Equivalentemente, a potência é igual ao empuxo vezes a velocidade no ar.

$$P = F_E v_h \quad (2.17)$$

Por simplificação, a operação se dá para uma velocidade do veículo baixa, então v_h é a velocidade quando o veículo está pairando. Além disso, a velocidade do fluxo livre

é zero (o ar do ambiente ao redor está estacionário relativo ao quadricóptero). Obtém-se, portanto, a Equação 21, a velocidade como uma função do empuxo a partir da Teoria do Momento Linear:

$$v_h = \sqrt{\frac{F_E}{2A\rho}} \quad (2.18)$$

Onde ρ é a densidade do ar ao redor, e A é área criada pelo giro da hélice. Usando as equações acima, e levando em conta que no caso geral o torque produzido pelo motor é $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$; e neste caso o torque é proporcional ao Empuxo F_E por uma constante de proporcionalidade K_τ , determinada pela configuração e parâmetros de construção da hélice, $\tau = K_\tau F_E$.; assim, igualando as Equações 2.17 e 2.18, a Potência pode ser reescrita:

$$P = \frac{K_v \tau \omega}{K_t} = \frac{K_v K_\tau \omega F_E}{K_t} = F_E \sqrt{\frac{F_E}{2\rho A}} \quad (2.19)$$

Encontra-se a Equação 22, o Empuxo, F_E , em função da velocidade angular do motor:

$$F_E = \frac{(K_v K_\tau \sqrt{2\rho A} \omega)^2}{K_t} = K_F \omega^2 \quad (2.20)$$

Onde K_F é uma constante de dimensão do motor. Baseado nessas considerações a força resultante no eixo z_B do referencial B, fixo ao corpo rígido, pode ser descrito como a contribuição dos empuxos individuais gerados, somando sobre todos os motores, descrita pela Equação 2.21 em termos de suas componentes vetoriais:

$$F_E = K_F \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum \omega_i \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Contrário ao movimento do corpo no fluido, ocasionado pela Força de Empuxo, existe o atrito, que pode ser modelado como uma força proporcional a velocidade linear em cada direção, assumindo que o quadricóptero esteja operando em um fluido com um número de Reynolds pequeno, onde pode-se assumir que a Força de arrasto seja proporcional a velocidade linear. Esse modelo é uma simplificação de atrito em fluidos, mas que é

suficiente para o modelamento e simulação. Portanto, a Força de Arrasto F_D é dada pela Equação 2.22:

$$F_D = \begin{bmatrix} -C_x \dot{x} \\ -C_y \dot{y} \\ -C_z \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.3.3 TORQUES

Calculadas as forças no quadricóptero, é importante calcular os torques resultantes. Cada rotor contribui com um torque ao redor do eixo z_B . Esse torque é necessário para manter a hélice girando e, conseqüentemente, produzir o empuxo; isso cria uma aceleração angular instantânea que supera a Força de Arrasto. Segundo a Dinâmica dos Fluídos, essa força pode ser modelada pela Equação 25:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D A_h v^2 \quad (2.23)$$

Onde ρ é a densidade do fluído ao redor, A_h é a área da seção transversal da hélice, e C_D é uma constante adimensional. Com isso, o torque resultante devido à Força de Arrasto é dado pela Equação 26:

$$\tau_D = (1/2) \rho C_D A_h v^2 R \quad (2.24)$$

Onde ω é a velocidade da hélice, R é o raio da hélice e b_D é uma constante apropriada de dimensionalidade. Segundo [15] a equação de torque em relação ao eixo ZB para o motor i pode ser definida pela Equação 27:

$$\tau = b_D \omega^2 + I_M \dot{\omega} \quad (2.25)$$

Onde $\dot{\omega}$ é a aceleração angular em relação ao referencial B, I_M é a matriz momento de inércia do corpo em relação B, e b_D é a constante de proporcionalidade do torque. Assumindo que o drone esteja em Modo Estacionário de Vôo, significa dizer que não há aceleração angular, ou seja $\dot{\omega} = 0$, o torque em relação ao eixo z_B de B pode ser simplificado para a Equação 28:

$$\tau_D = (-1)^{i+1} b_D \omega_i^2 \quad (2.26)$$

O termo $(-1)^{i+1}$ significa que os motores estão girando em direções contrárias, ou seja, motores ímpares girando na direção horária, e pares na direção anti-horária. Dessa forma, a soma dos torques produzidas por cada rotor resulta no torque de guinada dado pela Equação 29:

$$\tau_\psi = b_D(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \quad (2.27)$$

Os torques de rolagem, τ_ϕ , e de arfagem, τ_θ , podem ser encontrados, segundo [15], usando os princípios da mecânica clássica, que por definição é o produto vetorial da distância do centro de massa do quadricóptero ao centro de cada motor, L , e a força de Empuxo gerada por esse motor. Assim, os torques de Rolagem, τ_ϕ , e Arfagem, τ_θ , são dados pelas Equações 30 e 31, respectivamente:

$$\tau_\phi = \sum_{i=1,3} r \times F_{E,i} = LK_F(\omega_1^2 - \omega_3^2) \quad (2.28)$$

$$\tau_\theta = \sum_{i=2,4} r \times F_{E,i} = LK_F(\omega_2^2 - \omega_4^2) \quad (2.29)$$

Com isso, os Torques resultantes são dados no Referencial Fixo ao Corpo B, em sua forma matricial, pela Equação 32:

$$\tau_B = \begin{bmatrix} LK_F(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ LK_F(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ b_D(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

É importante destacar que o equacionamento é simplificado. Foi ignorado efeitos avançados que contribuem para uma dinâmica do Quadricóptero altamente não linear, exemplo são as Forças de Arrasto Rotacional, pois são desconsideradas deformações das hélices durante o voo, distúrbios como ventos e outros.

2.4 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO: FORMALISMO EULER-NEWTON

Como citado em [23] é importante destacar alguns pontos:

- As equações do movimento translacional são dadas em função do Referencial Inercial;
- As Forças aerodinâmicas e torques são melhores modeladas quando aplicadas ao referencial fixo ao corpo;
- Os sensores necessários para estimar os parâmetros de voo, acelerômetros, giroscópios, etc., dão informações relativas ao movimento para o referencial fixo ao corpo;

O modelo baseado no formalismo de Newton-Euler utiliza as equações de movimento da mecânica para representação do sistema físico. Utilizando a Segunda Lei de Newton, a força resultante que age sobre um corpo deve ser igual ao produto da massa desse corpo pela sua aceleração, conforme descrita na Equação 2.31:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.31)$$

A Equação 2.32 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$m\ddot{r} = \Sigma F \quad (2.32)$$

As forças consideradas no modelo que atuam na aeronave são as forças de tração, arrasto e gravitacional. Como já explicado resume-se que a aeronave utiliza um motor elétrico do tipo DC e uma hélice como conjunto propulsivo resultando uma força de empuxo gerada pela hélice que é proporcional ao quadrado da velocidade de rotação da hélice. O arrasto que atua na estrutura da aeronave, devido à viscosidade do fluido, pode ser simplificado de tal forma que seja proporcional à velocidade linear da aeronave. Por fim, a força gravitacional sempre estará atuando sobre a aeronave na direção z de T [24].

É importante destacar que a Força de Empuxo é calculada no Referencial Fixo ao Corpo, para ser referenciada no Referencial Inercial deve ser multiplicada pela Matriz de Rotação R_T . Resulta, portanto, a equação de movimento linear, em forma matricial, descrita pela Equação 2.33:

$$m\ddot{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + R_T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Sigma\omega_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_d\dot{x} \\ -K_d\dot{y} \\ -K_d\dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

É interessante perceber que o movimento linear é melhor obtido no Referencial Inercial, enquanto que as equações do movimento rotacional são mais facilmente obtidas

no Referencial Fixo ao Corpo. Estas equações do movimento rotacional são obtidas pela Equação de Euler para Dinâmica de Corpos Rígidos através da Equação 2.34:

$$I_M \dot{\omega} + \omega \times (I_M \omega) = \tau_B \quad (2.34)$$

Assim, manipulando a Equação 2.34 encontra-se o vetor aceleração angular $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega} = I_M^{-1}(\tau_B - \omega \times (I_M \omega)) = \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi - (I_{zz} - I_{yy})qr}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_\theta - (I_{xx} - I_{zz})rp}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_\psi - (I_{yy} - I_{xx})pq}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Em resumo, o modelo utiliza o somatório das forças e torques produzidos no corpo rígido. O sistema de Equações 2.36 resumem essa Dinâmica.

$$\begin{bmatrix} F_{res} \\ \tau_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mI_{3x3} & 0 \\ 0 & I_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \times I_M \omega \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Onde:

- F_{res} é a força resultante exercida no quadricóptero composta pela soma da Força Peso, da Força de Empuxo resultante da soma dos empuxos individuais de cada rotor; e a da Força de Arrasto;
- τ_B é o torque resultante da ação dos motores;
- m é a massa total do corpo rígido;
- I_{3x3} é matriz identidade de ordem 3x3;
- \dot{v} é o vetor de acelerações lineares no Referencial Inercial;
- $\dot{\omega}$ é o vetor de acelerações angulares no Referencial Fixo ao corpo;
- $v = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ é o vetor velocidade translacional no referencial inercial;
- $\omega = [p \ q \ r]^T$ é o vetor velocidade angular no referencial fixo ao corpo;

Para calcular a matriz de inércia do quadricóptero considera-se um modelo de corpo rígido esférico [23] conforme apresentado na Figura 2.6. Devido a simetria do quadricóptero a matriz de Inércia se torna uma matriz diagonal, e pode ser determinada por:

$$I_M = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

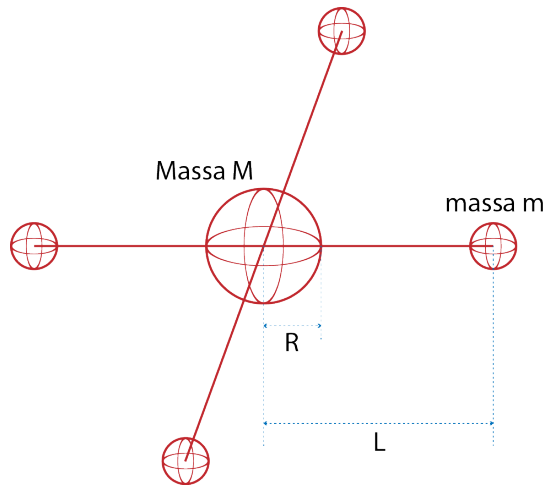


Figura 2.6 – Modelo para cálculo do momento de inércia do quadricóptero.

Dessa forma, os Momentos de Inércia apresentados são calculados pelas seguintes equações:

$$I_{xx} = \frac{2MR^2}{5} + 2L^2m \quad (2.38)$$

$$I_{yy} = \frac{2MR^2}{5} + 2L^2m \quad (2.39)$$

$$I_{zz} = \frac{2MR^2}{5} + 4L^2m \quad (2.40)$$

2.5 MODO DE OPERAÇÃO: VOO ESTACIONÁRIO

Considerando que o quadricóptero é projetado para estabilizar no ar, ou seja, que esteja em condição de equilíbrio correspondendo a um voo estático planando no ar. Essa

condição de equilíbrio corresponde a uma posição fixa no espaço, assim, a força empuxo sobre o quadricóptero é igual a sua força peso, e além disso os motores giram na mesma velocidade, produzindo um torque total nulo. Outra simplificação importante é que nessa configuração a velocidade angular ω pode ser aproximada da derivada dos ângulos de Euler, devido a pequenas variações angulares; além disso as perturbações nessa configuração de vôo estático são desprezíveis, assim como os efeitos giroscópicos, ou seja $\omega \times (I_M \omega) = 0$ [14]:

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Dessa forma, as equações de interesse para o controle da orientação e da altura do quadricóptero são simplificadas:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{LU_2}{I_{xx}} \\ \ddot{\theta} = \frac{LU_3}{I_{yy}} \\ \ddot{\psi} = \frac{LU_4}{I_{zz}} \\ \ddot{z} = g - \frac{U_1}{m} \end{cases} \quad (2.42)$$

Onde as entradas são definidas por $U = [U_1, U_2, U_3, U_4]$. U_1 é responsável pela magnitude do empuxo gerado pelos rotores, enquanto que U_2 , U_3 e U_4 são responsáveis pelos torques em torno dos eixos x_B , y_B e z_B , respectivamente.

$$\begin{cases} U_1 = K_F(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ U_2 = K_F(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ U_3 = K_F(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ U_4 = b_D(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{cases} \quad (2.43)$$

Como ressaltado em [14] os ângulos e suas derivadas no tempo, que representam o movimento rotacional, não dependem das componentes de translação (x,y,z), mas o contrário sim, ou seja, o movimento translacional depende dos ângulos. Dessa forma, o sistema pode ser subdividido em dois subsistemas, o subsistema de rotações angulares e o subsistema de translações lineares, ver Figura 2.7.

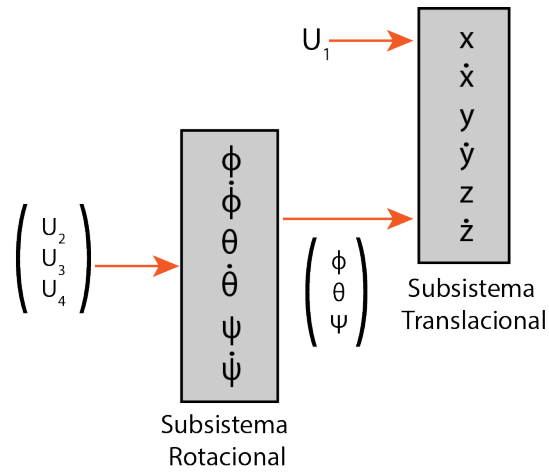


Figura 2.7 – Subsistemas de Rotação e Translação.

2.6 ANÁLISE DO SISTEMA EM MALHA ABERTA

Uma análise em Malha Aberta é importante para se obter características do comportamento do sistema, destacando especificações quantitativas. A análise consiste em aplicar um sinal conhecido na entrada do sistema para entender como a variável controlada está se comportando, ver Figura 2.8

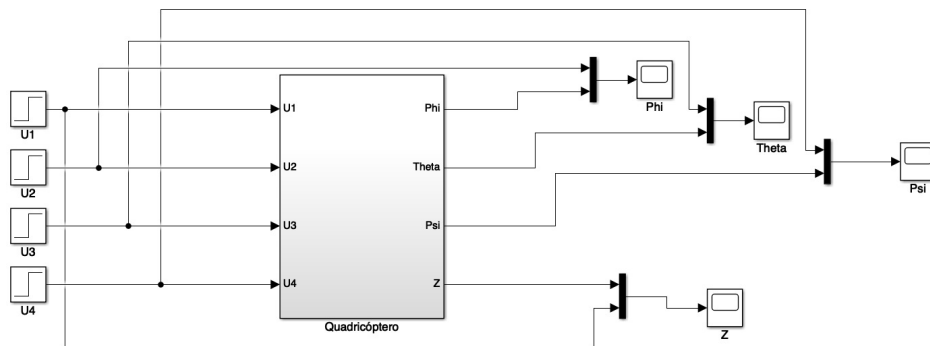


Figura 2.8 – Análise em Malha Aberta.

Aplica-se ao conjunto de entradas U , definido pela Equação 2.43, funções Degrau. O resultado é mostrado nas Figuras 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12.

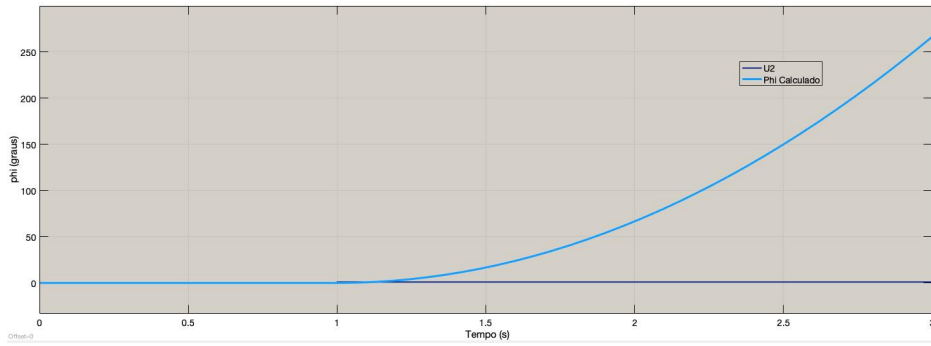


Figura 2.9 – Resposta ϕ a U_2 igual a um degrau.

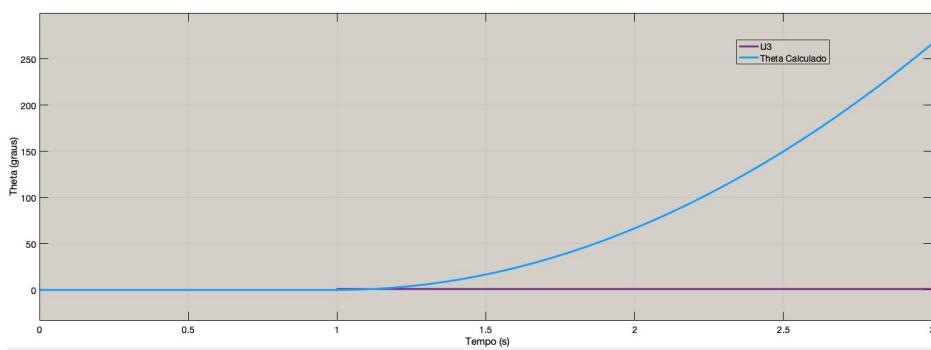


Figura 2.10 – Resposta θ a U_3 igual a um degrau.

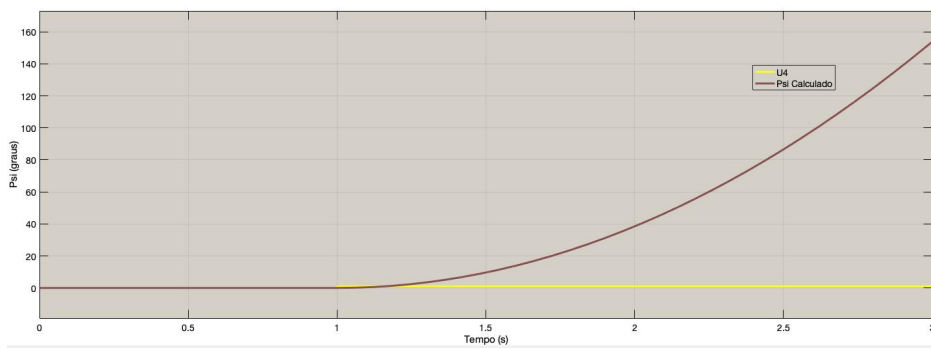


Figura 2.11 – Resposta ψ a U_4 igual a um degrau.

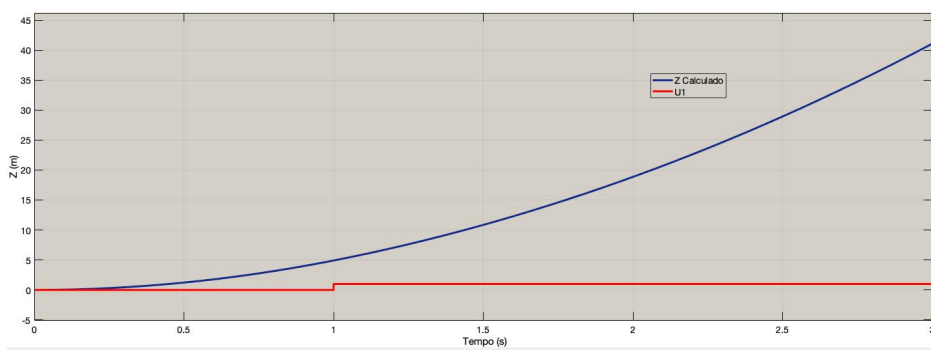


Figura 2.12 – Resposta z a U_1 igual a um degrau.

O sistema é instável, pois as respostas aos degraus limitados são ilimitadas. A explicação pode ser facilmente percebida aplicando-se a Transformada de Laplace às equações da dinâmica do quadricóptero, descritas pelo conjunto de Equações 2.42, obtendo assim as funções de transferências para cada variável de controle:

$$\begin{cases} \frac{\phi(s)}{U_2(s)} = \frac{L}{s^2 I_{xx}} \\ \frac{\theta(s)}{U_3(s)} = \frac{L}{s^2 I_{yy}} \\ \frac{\psi(s)}{U_4(s)} = \frac{L}{s^2 I_{zz}} \\ \frac{z}{U_1(s)} = \frac{1}{s^2 m} \end{cases} \quad (2.44)$$

Dessa forma, percebe-se que os sistemas representados por funções de segunda ordem, para a orientação e altura, possuem 2 polos na origem, o que os torna instáveis. Portanto, se faz necessário o uso de controladores afim de se obter a estabilidade do sistema.

3 CONTROLE

O objetivo principal deste trabalho é obter um controle que estabilize o quadricóptero numa posição fixa, ou seja planando estaticamente a uma determinada altura do chão. Dessa forma se projeta um controle para que as instabilidades sejam compensadas. A Figura 3.1 apresenta um diagrama de um sistema genérico de controle. É a partir da modelagem dinâmica do quadricóptero que se desenvolvem os controladores, auxiliado pelo uso das equações em Espaços de Estados.

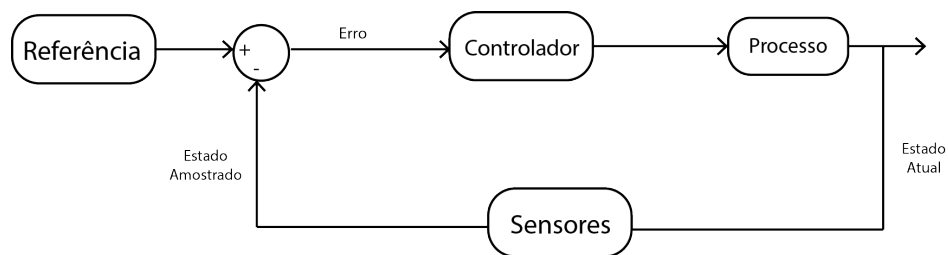


Figura 3.1 – Planta de Controle de um sistema genérico.

Nessa configuração, o estado atual, medido pelos sensores, é comparado com o valor desejado, referência, resultando num erro, a diferença entre o estado atual amostrado do sistema e o estado desejado. Este erro alimenta o controlador que atua no processo para modificar seu estado para atingir a referência. Utilizando a técnica de controle PID para calcular o valor de atuação sobre o processo a partir das informações do valor desejado e do valor atual da variável do processo. Este valor de atuação sobre o processo é transformado em um sinal adequado ao atuador utilizado e deve garantir um controle estável e preciso.

3.1 CONTROLADOR PID

O controlador PID, muito utilizado em sistemas de controle, é preferido por ser fácil de implementar, simples de entender, baixo custo e, ainda assim, robusto. Além disso, esse controlador apresenta um bom desempenho para uma ampla faixa de sistemas. O controlador PID, como o próprio nome sugere, é uma técnica que combina as três ações de controle, proporcional, integral e derivativo. A combinação dessas ações fornece as van-tags individuais de cada uma das três técnicas, juntando todas em um único controlador [25, 1].

Basicamente o controlador PID pode ser dividido em três componentes:

- P é referente a componente de Ganho Proporcional, K_p , sua função é a correção

proporcional do erro, ou seja, a correção a ser aplicada ao processo deve crescer na proporção que cresce o erro entre o valor real e o desejado. Esta componente é dependente apenas do estado atual do processo.

- I é referente a componente de Ganho Integral, K_i , sua função é eliminar o erro em regime permanente, ou seja, esta componente é dependente do acumulativo dos erros passados.
- D é referente a componente de Ganho Derivativo, K_d , sua função é atenuar variações do sistema, sendo assim capaz de melhorar o desempenho do processo durante os transitórios de estado. Esta componente é dependente da taxa de variação do erro.

Estas três componentes são ajustadas através de ganhos individuais que podem aumentar ou diminuir a ação delas. Esses ganhos são importantes por que são eles que definem todo o comportamento do sistema de controle. O diagrama de blocos de um controlador PID genérico é apresentado na Figura 3.2.

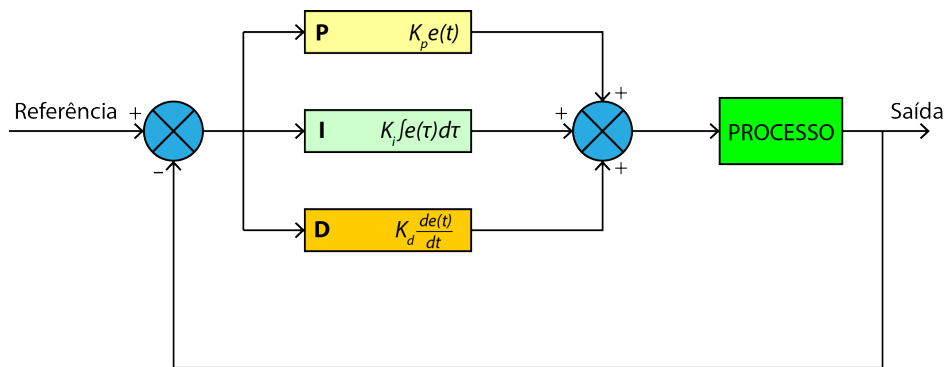


Figura 3.2 – Diagrama de blocos explicitando um controlador PID genérico.

Busca-se, então, encontrar um $u(t)$ de forma que $x(t)$ siga a referência desejada $x^{des}(t)$. Introdz-se, portanto, a função erro. A função erro é definida:

$$e(t) = x^{des}(t) - x(t) \quad (3.1)$$

O interesse no controle é obter um erro que tenda exponencialmente para zero. Portanto, a estratégia é encontrar um $u(t)$ que torne verdadeira a seguinte equação:

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e + K_i \int e(\tau) d\tau = 0 \quad (3.2)$$

Em que K_p é o ganho proporcional, K_d é o ganho derivativo e K_i é o ganho integrativo. Se os ganhos K_p , K_d e K_i forem maior que zero, será garantido que o erro tenderá exponencialmente a zero. A Equação 3.9 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u(t) = \ddot{x}^{des}(t) + K_d \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_i \int e(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

O objetivo deste trabalho será focado no controle da orientação e da altura do quadricóptero. Sendo assim, o sistema é resumido no controle das variáveis ϕ , θ , ψ e z . Serão implementados 4 controladores PID, um para cada ângulo de orientação e um para a altura z . Portanto:

$$\begin{cases} \ddot{e}_\phi = K_d \dot{e}_\phi(t) + K_p e_\phi(t) + K_i \int e_\phi(\tau) d\tau \\ \ddot{e}_\theta = K_d \dot{e}_\theta(t) + K_p e_\theta(t) + K_i \int e_\theta(\tau) d\tau \\ \ddot{e}_\psi = K_d \dot{e}_\psi(t) + K_p e_\psi(t) + K_i \int e_\psi(\tau) d\tau \\ \ddot{e}_z = K_d \dot{e}_z(t) + K_p e_z(t) + K_i \int e_z(\tau) d\tau \end{cases} \quad (3.4)$$

Aplicando a Transformada de Laplace às Equações 3.4 e introduzindo nas Equações de processo 2.44, obtém-se as equações do sistema com controle:

$$\frac{\phi(s)}{\phi_{REF}(s)} = \frac{LK_{d\phi}(s^2 + s\frac{K_{p\phi}}{K_{d\phi}} + \frac{K_{i\phi}}{K_{d\phi}})}{s^3 I_{xx} + LK_{d\phi}(s^2 + s\frac{K_{p\phi}}{K_{d\phi}} + \frac{K_{i\phi}}{K_{d\phi}})} \quad (3.5)$$

$$\frac{\theta(s)}{\theta_{REF}(s)} = \frac{LK_{d\theta}(s^2 + s\frac{K_{p\theta}}{K_{d\theta}} + \frac{K_{i\theta}}{K_{d\theta}})}{s^3 I_{yy} + LK_{d\theta}(s^2 + s\frac{K_{p\theta}}{K_{d\theta}} + \frac{K_{i\theta}}{K_{d\theta}})} \quad (3.6)$$

$$\frac{\psi(s)}{\psi_{REF}(s)} = \frac{LK_{d\psi}(s^2 + s\frac{K_{p\psi}}{K_{d\psi}} + \frac{K_{i\psi}}{K_{d\psi}})}{s^3 I_{zz} + LK_{d\psi}(s^2 + s\frac{K_{p\psi}}{K_{d\psi}} + \frac{K_{i\psi}}{K_{d\psi}})} \quad (3.7)$$

3.1.1 CRITÉRIOS DE DESEMPENHO DO SISTEMA

Como descrito em [1] uma planta pode ser representado por um sistema de segunda definido, através da modelagem no domínio da frequência da sua função de transferência, pela seguinte equação:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.8)$$

Os polos desse sistema são dados por:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\sigma_d \pm \omega_d \quad (3.9)$$

A frequência natural ω_n e a fração de amortecimento ζ servem para descrever as características da resposta transiente de segunda ordem, assim como as constantes de tempo descrevem a resposta do sistema de primeira ordem. Dependendo do valor da fração de amortecimento esse sistema pode ser caracterizado como: sem amortecimento, $\zeta = 0$; subamortecido, $0 < \zeta < 1$; criticamente amortecido, $\zeta = 1$; e superamortecido, $\zeta > 1$.

Especificamente é importante destacar a resposta de um sistema subamortecido. Apresentado na Figura 2.8, outros parâmetros são importantes para especificar esse sistema: Tempo de Subida, T_r ; Tempo de Pico, T_p ; Sobrevalor Percentual, $\%SP$; e Tempo de Assentamento, T_s . [1]

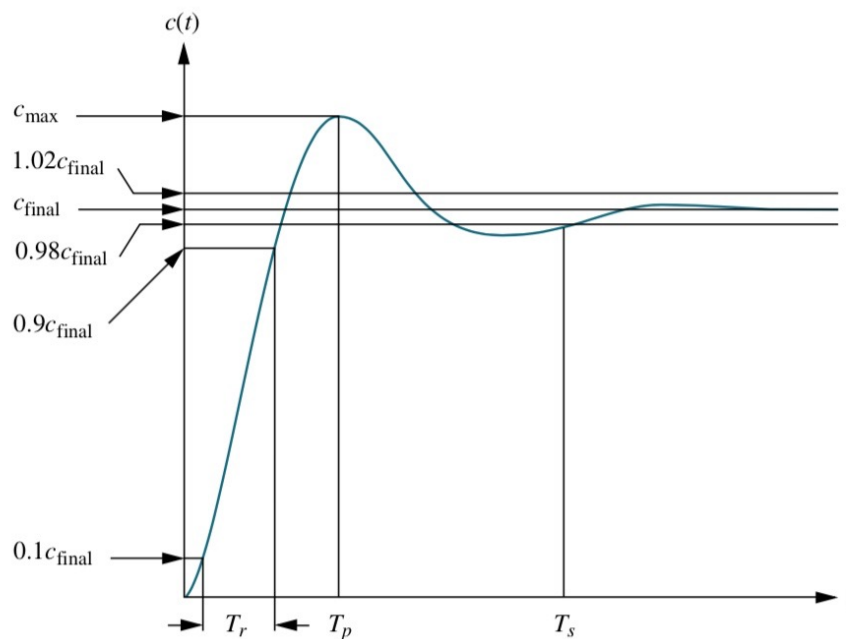


Figura 3.3 – Especificações para uma resposta subamortecida de segunda ordem. Fonte: [1]

Onde:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.10)$$

$$\%SP = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100 \quad (3.11)$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%SP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\%SP/100}} \quad (3.12)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (3.13)$$

Deve-se então, determinar as especificações de projeto. Para as variáveis ϕ e θ os requisitos são apresentados na Tabela 3.1, para a variável ψ os requisitos são apresentados na Tabela 3.2, e finalmente, para a variável z os requisitos são apresentados na Tabela 3.3. Para todos os projetos o Sobrevalor percentual máximo é de 20%.

T_p (s)	T_s (s)
1	1.3

Tabela 3.1 – Requisitos para ϕ e θ .

T_p (s)	T_s (s)
1.5	2

Tabela 3.2 – Requisitos para ψ .

T_p (s)	T_s (s)
1.5	4

Tabela 3.3 – Requisitos para z .

3.2 PROJETO DO CONTROLADOR PID

Sintonia do Controlador se dá através do ajuste dos ganhos para obter as especificações de desempenho desejadas do projeto do controlador. Essa sintonia pode ser realizada manualmente por meio de tentativa e erro, através do conhecimento heurístico do sistema e manipulação dos ganhos ou aplicando alguma das técnicas matemáticas desenvolvidas que auxiliam o programador a encontrar mais rapidamente os valores de ajustes necessários [25]

Uma das dificuldades para a elaboração do controlador PID, está relacionada a complexidade em se modelar esse tipo de veículo, ao qual não foi possível obter a função de transferência da dinâmica total do sistema. Sem a função de transferência do sistema as técnicas convencionais que facilitam a sintonia dos ganhos do controlador PID, como a análise pelo lugar geométrico das raízes, análise pelo critério de estabilidade de

Routh-Hurwitz, dentre outras, não poderão ser aplicadas, requerendo uma sintonia manual dos ganhos.

Para em [1], o projeto do controlador PID consiste nas seguintes etapas:

- Calcular o desempenho do sistema não compensado para determinar quanto de melhoria é preciso na resposta transiente.
- Projetar o controlador PD para atender as especificações da resposta transiente.
- Projetar o controlador PI para produzir o erro de regime estacionário desejado.
- Determinar os Ganhos K_p , K_i e K_d .

4 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Nesta seção é detalhada a implementação do sistema em diagramas de bloco, assim como o projeto do controlador. Desta forma, os resultados, o controle de atitude e altura, são apresentados a partir das simulações implementadas por meio do uso da ferramenta Simulink.

4.1 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO EM MATLAB

A ferramenta de simulação MatLab foi adotada para implementação e validação do modelo. Baseado nas Equações 3.7 da dinâmica do quadricóptero, o modelo foi implementado em Simulink. A Figura 4.1 mostra o bloco que resume o sistema do quadricóptero, onde U_1, U_2, U_3, U_4 são as entradas; e ϕ, θ, ψ, x, y e z são as saídas.

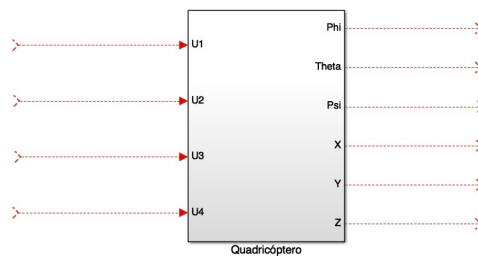


Figura 4.1 – Bloco da Dinâmica do Quadricóptero.

A arquitetura interna do bloco apresentado na Figura 4.1 é descrito em termo das equações matemáticas. É importante lembrar que o sistema é dividido em dois subsistemas: o Subsistema de Rotação, o qual modela as equações de orientação do quadricóptero; e o subsistema de Translação, o qual modela as equações da posição do quadricóptero no espaço. A Figura 4.2 apresenta o diagrama de bloco desses dois subsistemas interligados.

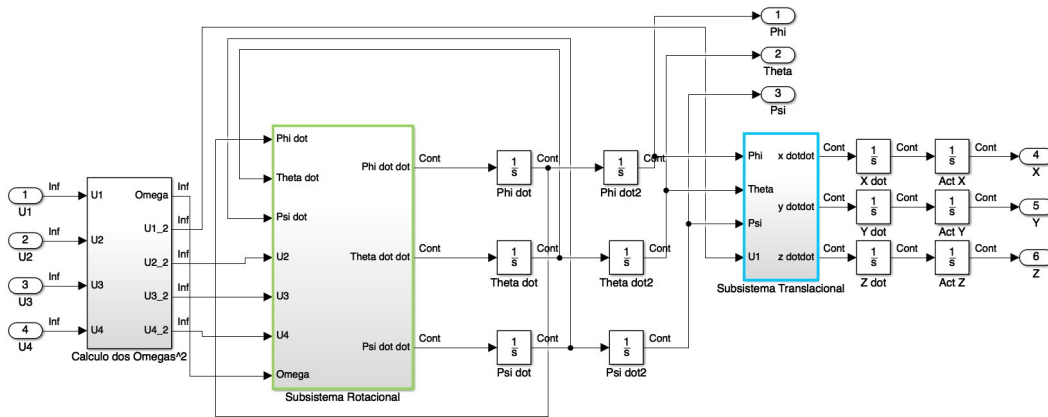


Figura 4.2 – Arquitetura interna do Quadricóptero, onde o bloco verde representa o Subsistema Rotacional e o azul o Subsistema Translacional.

A estrutura de controle é implementada, da mesma forma que os outros blocos, através das suas equações matemáticas. A arquitetura completa do sistema com controle é apresentada na Figura 4.3. O bloco dos Controladores é então apresentado na Figura 4.4, apresentando a forma que é construído.

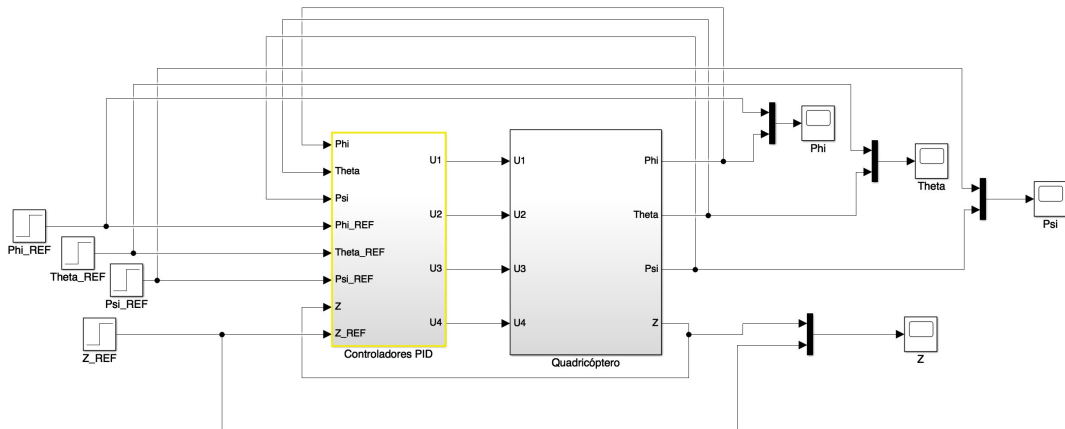


Figura 4.3 – Arquitetura de Controle do Quadricóptero., onde o bloco amarelo representa os controladores PID.

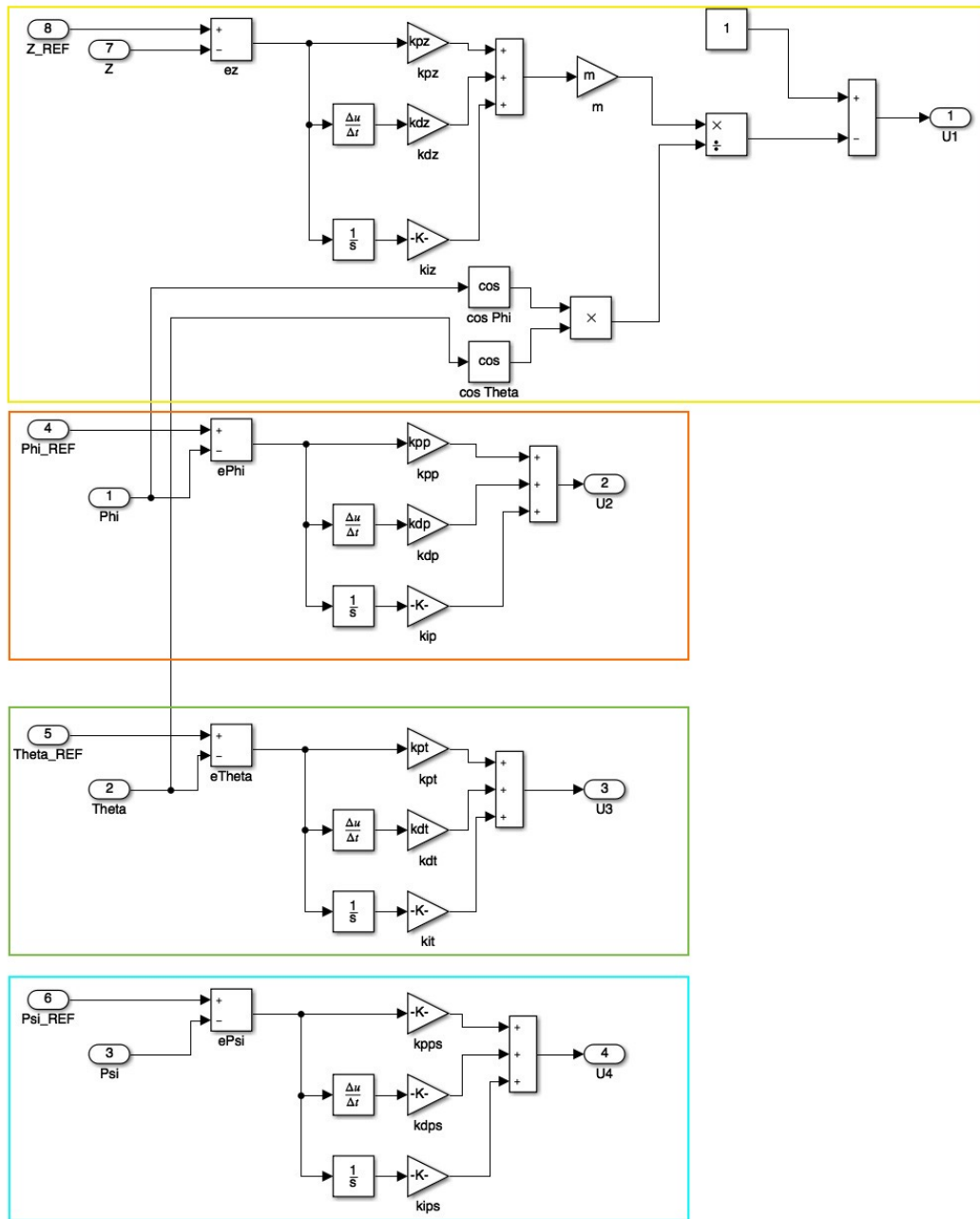


Figura 4.4 – Estrutura dos Controladores PID.

4.2 PARÂMETROS DO MODELO

Baseado em modelos já simulados, foram adotados os seguintes valores, dos parâmetros do quadricóptero, para simulação:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{xx} = 7.5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^2 \\ I_{yy} = 7.5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^2 \\ I_{zz} = 1.3 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^2 \\ J_r = 6.5 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \\ K_F = 3.13 \times 10^{-5} \\ b_D = 7.5 \times 10^{-7} \\ L = 0.23 \text{ m} \\ M = 0.65 \text{ kg} \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

4.3 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Os ganhos K_p , K_i , e K_d para cada controlador foram sintonizados conforme apresentado na seção 3.2. Inicialmente foi aplicado o método das aproximações sucessivas, contudo, em seguida, foi realizado um ajuste manual para obtenção de melhores resultados. Os valores dos Ganhos utilizados são apresentados na Tabela 4.1 abaixo.

Ganho	Valor
$K_{p\phi}$	1
$K_{d\phi}$	0.4
$K_{i\phi}$	0
$K_{p\theta}$	1
$K_{d\theta}$	0.4
$K_{i\theta}$	0.001
$K_{p\psi}$	1.2
$K_{d\psi}$	0.5
$K_{i\psi}$	0.001
K_{pz}	100
K_{dz}	40
K_{iz}	60

Tabela 4.1 – Ganhos dos PID.

Para o controle de ϕ foi proposto um controlador PD, ou seja $K_i = 0$, o que apresentou um comportamento de um sistema criticamente amortecido, Sobrevalor igual

a zero, e mostrou-se bastante satisfatório, pois o seu tempo de assentamento foi igual a 1,89s. O resultado pode ser visto na Figura 4.5.

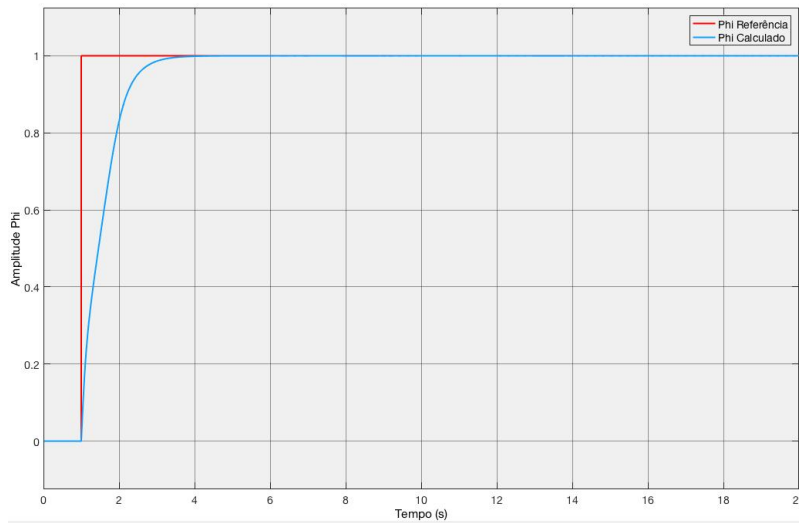


Figura 4.5 – Controle de ϕ .

Para θ foi proposto um controlador PID para se perceber a influência do K_i , que mesmo pequeno apresentou sobrevalor. O tempo de pico calculado foi igual a 1,039 segundos, e o tempo de assentamento foi igual a 1,236 segundos. O resultado pode ser visto na Figura 4.6.

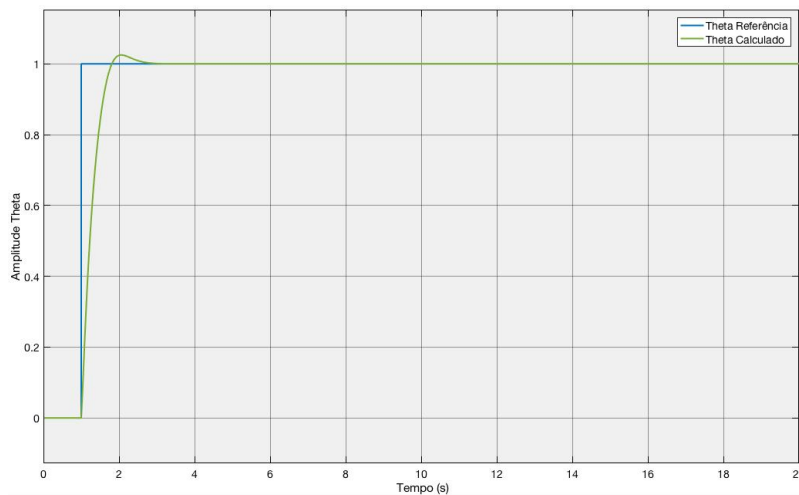
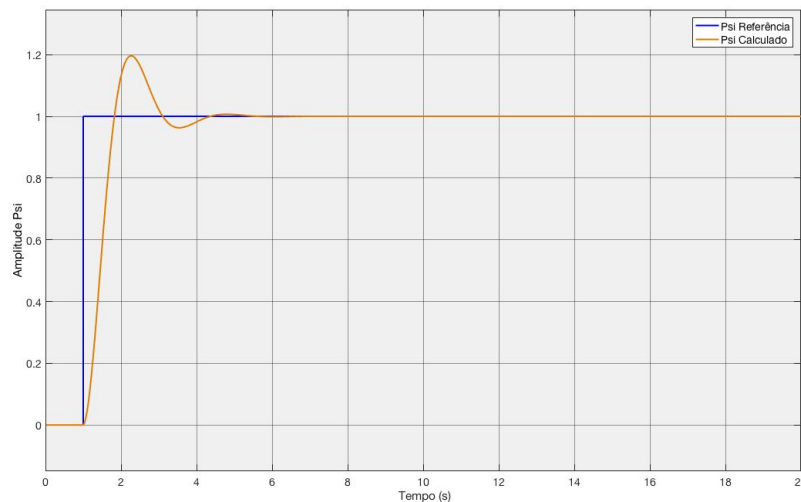
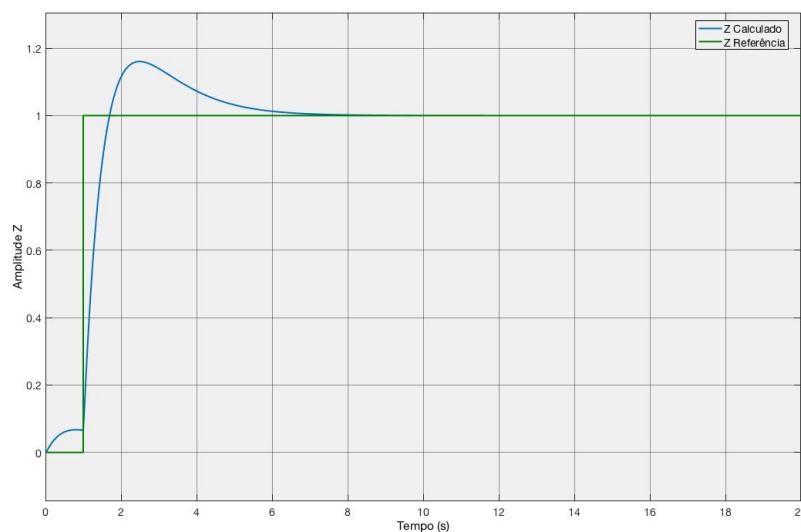


Figura 4.6 – Controle de θ .

Para ψ , da mesma forma que θ , foi implementado um controlador PID. O tempo de pico calculado foi igual a 1,55 segundos, e o tempo de assentamento igual a 2,12 segundos. O resultado pode ser visto na Figura 4.7

Figura 4.7 – Controle de ψ .

Para o controle de Altura do quadricóptero o resultado é apresentado na Figura 4.8. O tempo de pico calculado é de 1,482 segundos e o tempo de assentamento 4,51 segundos. Nesse caso houve uma perda no tempo de assentamento porque preferiu-se um menor sobrevalor.

Figura 4.8 – Controle de Altura z .

Para testar a eficiência do controle buscou-se introduzir pequenas perturbações, o modelo adotado é mostrado na Figura 4.9. Essas perturbações foram modeladas como pulsos de amplitude 0,1 e duração 3 segundos, nas variáveis calculadas, para verificar a atuação dos controladores. Foi introduzido uma perturbação ao sinal ϕ no tempo de 8 a 11 segundos, ver Figura 4.10, enquanto que uma perturbação no sinal z foi introduzida no período de 10 a 13 segundos, ver Figura 4.11 num período total de simulação de 20 segundos.

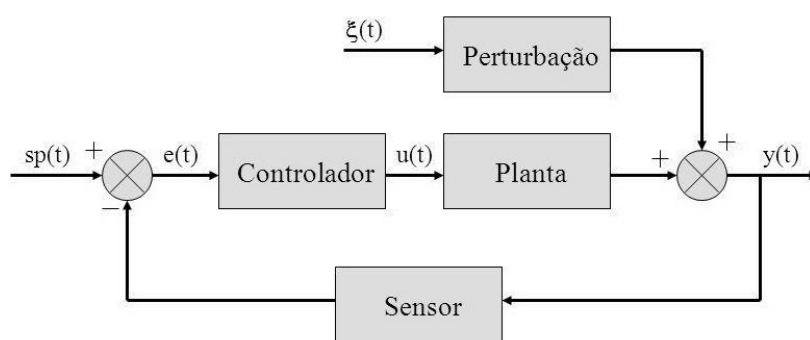


Figura 4.9 – Modelo de Sistema com perturbação na saída. Fonte: <https://www.verlab.dcc.ufmg.br>

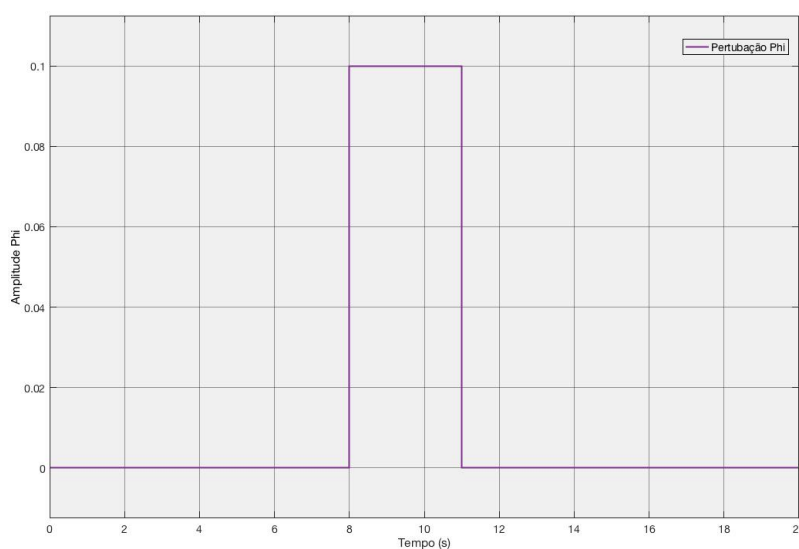


Figura 4.10 – Sinal de perturbação em ϕ .

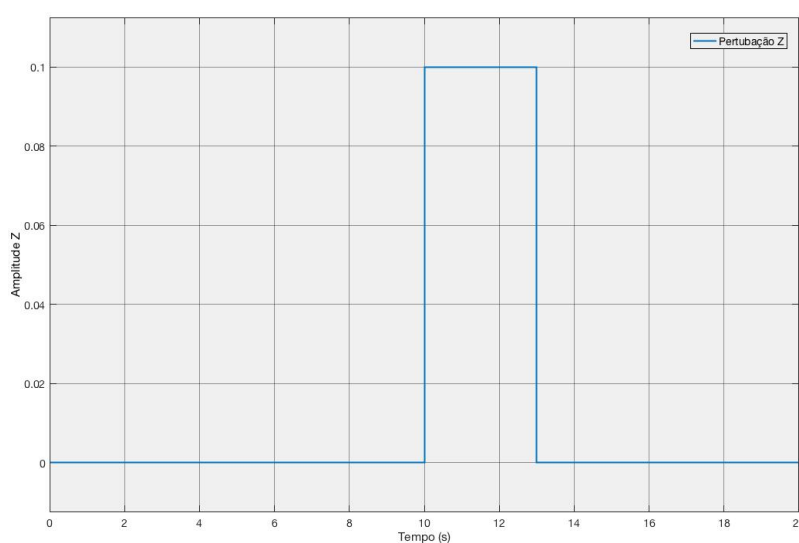


Figura 4.11 – Sinal de perturbação em z.

Os resultados das perturbações podem ser observados nas Figuras 4.12 e 4.13, para ϕ e z , respectivamente. Apesar dos distúrbios os controladores conseguem restabelecer o quadricóptero em sua posição e orientação desejada.

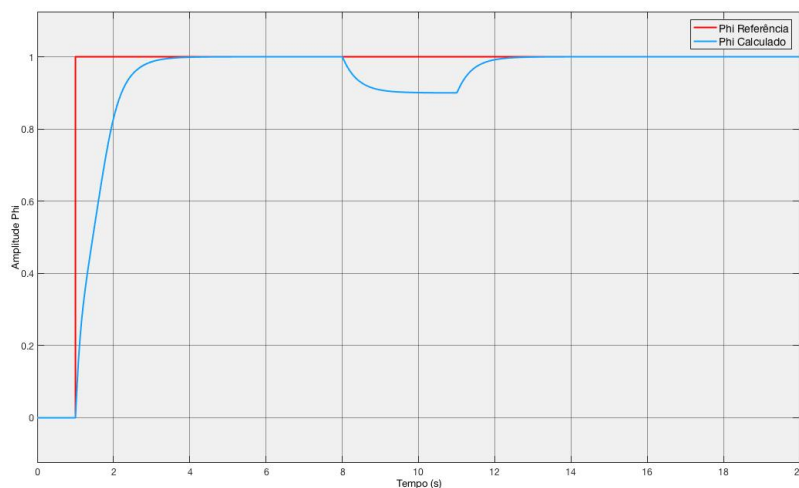


Figura 4.12 – Resposta ϕ com perturbação.

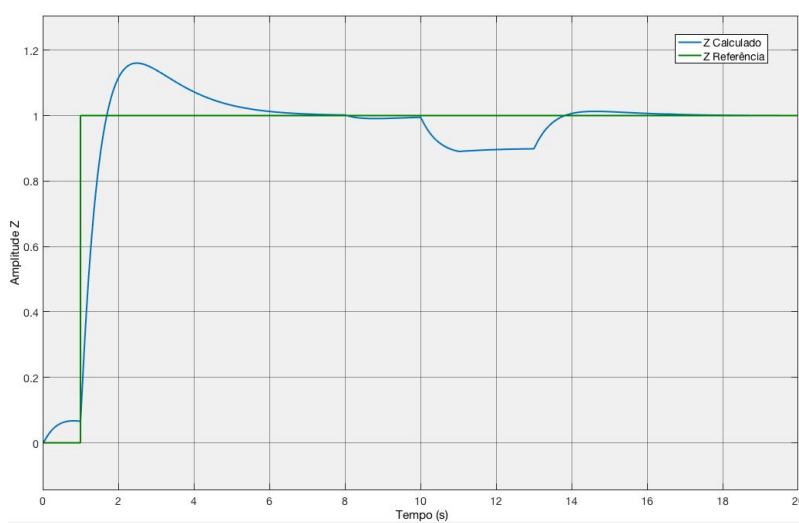


Figura 4.13 – Resposta z com perturbação.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho consistiu em três etapas: fazer a modelagem matemática do sistema que permitisse analisar suas trajetórias através da sua orientação e posição, implementar um controlador nesse sistema afim de se obter a estabilidade, e finalmente, validar o modelo obtido através de uma ferramenta computacional apropriada..

A dinâmica do sistema foi obtida através do equacionamento Euler-Newton considerando as forças e os momentos que agem sobre o quadricóptero. Foram feitas simplificações no modelo, primeiro por ser um trabalho que foca no estudo de controle de um quadricóptero em condições de perturbações reduzidas, além de ter sido considerado um modo de operação: estabilização em vôo estacionário; segundo porque é um sistema altamente não linear, e o tempo e o conhecimento necessários são grandes, o que foge do escopo deste projeto.

O trabalho desenvolvido satisfaz os objetivos desejados, já que foi obtido um modelo matemático da dinâmica do quadricóptero, e um controle por planejamento de trajetórias que envolvem técnicas de controle PID. Foi ainda modelado duas perturbações, e apesar da simplicidade do controlador, o mesmo se mostrou bastante satisfatório pois manteve o sistema projetado estável.

REFERÊNCIAS

- [1] N. S. Nise and F. R. da Silva, *Engenharia de sistemas de controle*. LTC, 2008, vol. 5.
- [2] J. F., “The history of drones (drone history timeline from 1849 to 2019),” 2018, Último acesso em 30 Novembro 2018. [Online]. Available: <https://www.dronethusiast.com/history-of-drones/>
- [3] G. C. Warne, “The predator’s ancestors - uavs in the great war),” 2012, Último acesso em 30 Novembro 2018. [Online]. Available: <http://warnepieces.blogspot.com/2012/07/the-predators-ancestors-uavs-in-great.html>
- [4] MilitaryHistoryNow, “Buzz kill – 13 remarkable facts about the v-1 flying bomb,” 2015, Último acesso em 30 Novembro 2018. [Online]. Available: <https://militaryhistorynow.com/2015/02/06/buzz-kill-15-amazing-facts-about-the-v-1-flying-bomb/>
- [5] R. Whittle, *Predator: The Secret Origins of the Drone Revolution*. Henry Holt and Co., 2014.
- [6] G. Apostolo, *The illustrated encyclopedia of helicopters*. Bonanza Books New York, 1984.
- [7] G. J. Leishman, *Principles of helicopter aerodynamics with CD extra*. Cambridge university press, 2006.
- [8] P. Castillo, R. Lozano, and A. Dzul, “Stabilization of a mini-rotorcraft having four rotors,” in *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)(IEEE Cat. No. 04CH37566)*, vol. 3. IEEE, 2004, pp. 2693–2698.
- [9] W. Holler, “Aplicações civis e comerciais de drones para os próximos anos,” 2018, Último acesso em 30 Novembro 2018. [Online]. Available: <https://droneshowla.com/artigo-aplicacoes-civis-e-comerciais-de-drones-para-os-proximos-anos/>
- [10] I. Prates, “As mil e uma utilidades dos drones,” 2015, Último acesso em 30 Novembro 2018. [Online]. Available: <https://mundogeo.com/blog/2015/09/10/as-mil-e-uma-utilidades-dos-drones/>
- [11] T. C. P. Benigno *et al.*, “Modelagem matemática e controle de atitude e posição do quadrotor,” 2015.
- [12] F. Hoffmann, N. Goddemeier, and T. Bertram, “Attitude estimation and control of a quadrocopter,” in *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2010, pp. 1072–1077.

-
- [13] B. Vieira and A. C. Serapiao, “Aerodinâmica de helicópteros,” *Editora Rio*, 2003.
- [14] S. Bouabdallah, “Design and control of quadrotors with application to autonomous flying,” Epfl, Tech. Rep., 2007.
- [15] S. N. Akhtar, “The use of modern tools for modelling and simulation of uav with haptic,” 2017.
- [16] E. B. Costa, “Algoritmos de controle aplicados a estabilização do voo de um quadrotor,” Ph.D. dissertation, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012.
- [17] G. V. Lima, R. Souza, A. Morais, and J. Morais, “Modelagem dinâmica de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero,” in *XII CEEL-Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica*, 2014.
- [18] I. A. Raptis, “Linear and nonlinear control of unmanned rotorcraft,” 2009.
- [19] W. F. Lages, “Descrições e transformações espaciais,” 2015.
- [20] G. V. Raffo, “Robust control strategies for a quadrotor helicopter: An underactuated mechanical system,” Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla, 2011.
- [21] J. M. Seddon and S. Newman, *Basic helicopter aerodynamics*. John Wiley & Sons, 2011, vol. 40.
- [22] S. J. Chapman, *Fundamentos de máquinas elétricas*. AMGH Editora, 2013.
- [23] A. S. C. Alves *et al.*, “Estudo e aplicação de técnicas de controle embarcadas para estabilização de voo de quadricópteros,” 2012.
- [24] F. M. M. Marques and L. Sanches, “Modelagem, simulação e controle de uma aeronave multirrotores,” *Horizonte Científico*, vol. 11, no. 1, 2017.
- [25] K. OGATA, “Engenharia de controle moderno.[sl],” 2011.

